

ZENTRALBLATT FÜR MATHEMATIK

14. Band, Heft 7 UND IHRE GRENZGEBIETE

S. 289—336

Algebra und Zahlentheorie.

Petterson, Erik L.: Die Begrenzung der Anzahl reduzibler Polynome bei gewissen unendlichen Variationen der Koeffizienten. Ark. Mat. Astron. Fys. 25 B, Nr 16, 1—3 (1936).

Sind $F(x)$ und $M(x)$ feste, ganzzahlige und teilerfremde Polynome, und ist der Grad von $M(x)$ um 1 kleiner als der Grad von $F(x)$, so ist das Polynom $f(x) = F(x) + E \cdot M(x)$ nur für endlich viele ganzzahlige Werte der Konstante E reduzibel. — Um das zu beweisen, benutzt der Verf. die Tatsache, daß eine ganzwertige Funktion $\varphi(E)$ nur dann für $E \rightarrow \infty$ gegen einen Limes streben kann, wenn sie von einem endlichen Werte von E an konstant bleibt. Man kann $F(x)$ als normiert voraussetzen. Die Wurzeln $\xi_\nu(E)$ ($\nu = 1, 2, \dots, m$) von $f(x)$ streben für $E \rightarrow \infty$ gegen die Wurzeln η_ν ($\nu = 1, 2, \dots, m-1$) von $M(x)$. Nimmt man an, $f(x)$ sei für eine unendliche Folge der Werte von E reduzibel, so kann man aus ihr eine Teilfolge auswählen, für welche ein echter Faktor $A(x; E)$ von $f(x)$ einen festen Grad r ($r < m$) hat und seine Wurzeln für $E \rightarrow \infty$ gegen bestimmte r Wurzeln der Folge $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{m-1}$ streben. Dann sind die Koeffizienten von $A(x, E)$ ganzwertig und streben für $E \rightarrow \infty$ gegen bestimmte Grenzwerte. Daraus schließt man, daß $A(x, E)$ von einem endlichen Werte von E an konstant ist, was der Teilerfremdheit von $F(x)$ und $M(x)$ widerspricht.

N. Tschebotaröw (Kasan).

Petterson, Erik L.: Über die Irreduzibilität ganzzahliger Polynome nach einem Primzahlmodul. J. reine angew. Math. 175, 209—220 (1936).

Indem der Verf. einen Irreduzibilitätssatz von O. Ore (Skr. norske Vid.-Akad., Oslo 1923, Nr 1) verallgemeinert und verschärft, beweist er folgenden Satz: Es sei $f(x)$ ein modulo p irreduzibles normiertes ganzzahliges Polynom k -ten Grades, $\frac{p^k-1}{v_k}$ der Exponent, zu welchem die Wurzeln von $f(x)$ modulo p gehören, und $g(x)$ ein beliebiges normiertes ganzzahliges Polynom. Es sei ferner $m > 0$, $(m, p) = 1$, h sei Minimalexponent der Beziehung $p^{kh} \equiv 1 \pmod{p}$, und $d_k = \left(\frac{p^k-1}{v_k}, \frac{p^{kh}-1}{m} \right)$. Dann muß $F(x) = f(g(x)^m)$ wenigstens einen irreduziblen Faktor vom Grade $r = i \frac{p^k-1}{d_k v_k} kh$ modulo p enthalten. Für $g(x) = x$ gibt es einen Faktor modulo p vom Grade $r = \frac{p^k-1}{d_k v_k} kh$ (d. h. bei $i = 1$). — Ferner erhält der Verf. unter Benutzung der Resultate seiner früheren Arbeit (vgl. dies. Zbl. 11, 387) folgendes Irreduzibilitätskriterium: Es sei $F(x) = (x^m - a)^k + E \cdot M(x)$, wo $(E, (k-1)!) = 1$ ist und a modulo E zum Exponenten v gehört. Enthält $(-a)^k + EM(0)$ keinen echten Faktor d mit

$$\frac{mEv}{d(E,v)} = 1,$$

so kann $F(x)$ nur dann reduzibel sein, wenn es wenigstens eine algebraische Einheit zur Wurzel hat.

N. Tschebotaröw (Kasan).

Roth, William E.: On k -commutative matrices. Trans. Amer. Math. Soc. 39, 483—495 (1936).

The i -th commute of a matrix A with respect to B_0 is given by the recursive relation $B_i = AB_{i-1} - B_{i-1}A$. If $B_k = 0$, $B_i \neq 0$ for $i < k$, then A is k -commutative with B_0 , and the B_i are linearly independent; if the degree of no elementary divisor of $A - \lambda I$ exceeds α , then $k \leq 2\alpha - 1$. A corollary gives a theorem of Weyl (Math. Analyse des Raumproblems, p.100. Berlin: Julius Springer 1923) that if $|A - \lambda I| = (a - \lambda)^n$

and if the degree of no elementary divisor of $A - \lambda I$ exceeds α , then A is k -commutative with respect to every matrix B of order n , and for any given B , $k \leq 2\alpha - 1$. A more explicit form for B is next obtained. Let $A - \lambda I$ have the elementary divisors $(a_i - \lambda)^{n_i}$ ($i = 1, 2, \dots, s$). If A is 2-commutative with B , and if $n_i \neq n_j \pm 1$ in case $a_i = a_j$, then the characteristic values of $f(A, B)$ where f is a polynomial are in the set $f(a_i, b_h)$ where b_h are the distinct characteristic values of B . A necessary and sufficient condition that $X_k = \mu^k X$ have a non-singular solution X is that for every i there exist at least one j , and for every j there exist at least one i such that $n_i = n_j$ and $(a_i - a_j)^k = \mu^k$ ($i, j = 1, 2, \dots, s$). *MacDuffee* (Madison).

Oldenburger, Rufus: Non-singular multilinear forms and certain p -way matrix factorizations. *Trans. Amer. Math. Soc.* **39**, 422—455 (1936).

A multilinear form $\sum a_{i_1 \dots i_p} y_{i_1}^{(1)} \dots y_{i_p}^{(p)}$ is non-singular if it is equivalent under non-singular transformations on the y 's to the diagonal form $\sum_{j=1}^n x_j^{(1)} \dots x_j^{(p)}$. Then the p -way matrix A can be written $(a_{i_1 \dots i_p}) = \left(\sum_{j=1}^n a_{1j i_1} \dots a_{pj i_p} \right)$ where each component matrix $(a_{kj i_k})$ is non-singular. The author then considers p -way matrices A where one component matrix is singular, the others non-singular. Necessary and sufficient conditions are obtained for the equivalence of a set of p -way matrices, $p \geq 3$, to a set of diagonal matrices. Finally he considers the "factoring" of a p -way matrix into 3-way components. *MacDuffee* (Madison).

Herrmann, Aloys: Remarques sur un théorème de Sylvester. *Enseignement Math.* **34**, 332—336 (1936).

A method is outlined for determining the number of solutions of the matrix equation $\sum_{v=0}^m C_v X^v = 0$ where C_v are matrices of order n , $C_0 = E$. A new proof is given of the known result that the characteristic roots of a solution of the above equation are solutions of the scalar equation $\left| \sum_{v=0}^m C_v \lambda^v \right| = 0$. *MacDuffee*.

Tognetti, Mario: Sulla riduzione a forma canonica di una classe speciale di matrici. *Atti Accad. Sci. Torino* **71**, 97—104 (1935).

A geometric interpretation is given of the chains which occur in finding the Jordan normal form of a matrix. This approach leads easily to the determination of the known normal form of a rational function of a matrix in normal form having a single elementary divisor. The last restriction is now removed. *MacDuffee*.

Cherubino, Salvatore: Sulle matrici permutabili o diagonalizzabili. *Atti Accad. Peloritana Messina* **37**, 299—308 (1935).

New proofs which hold for both finite and infinite matrices are given for a number of theorems (mostly known) about unitary equivalence and normal matrices. Thus if A is normal with characteristic root $a + ib$, then a is a root of its hermitian part and ib of its skew-hermitian part. *MacDuffee* (Madison).

Cherubino, Salvatore: Fonctions holomorphes de matrice. *C. R. Acad. Sci., Paris* **202**, 1892—1894 (1936).

Consider two matrix variables $x = s + t$ and $y = \sigma + \tau$ where s, σ are hermitian and t, τ skew-hermitian. Then y is a holomorphic function of x if and only if $\partial \sigma / \partial s = \partial \tau / \partial t$ is hermitian, and $\partial \sigma / \partial t = \partial \tau / \partial s$ is skew-hermitian. These are the Cauchy-Riemann conditions for matrices of order 1. *MacDuffee* (Madison).

● **Chevalley, Claude:** L'arithmétique dans les algèbres de matrices. (*Actualités scient. et industr.* Nr. 323. *Exposés math. publiés à la mémoire de Jacques Herbrand.* XIV.) Paris: Hermann & Cie. 1936. 35 pag. Frs. 10.—.

Die Arithmetik einer einfachen Algebra \mathfrak{S} über einem Zahlkörper hat bekanntlich (vgl. z. B. H. Hasse, dies. Zbl. **1**, 198; Nehr Korn, dies. Zbl. **7**, 103) folgende

Eigenschaften: 1. Die Ideale bilden ein Gruppoid, derart, daß das Produkt $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$, wenn es erklärt ist, mit dem Modulprodukt von $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ zusammenfällt, daß ferner die Linkseinheit \mathfrak{D} eines Ideals \mathfrak{A} mit der Linksordnung von \mathfrak{A} übereinstimmt, also aus allen λ mit $\lambda\mathfrak{A} \subset \mathfrak{A}$ besteht (analog für Rechtseinheit \mathfrak{D}'), daß schließlich \mathfrak{A}^{-1} aus allen μ besteht mit $\mu\mathfrak{A} \subset \mathfrak{D}'$, $\mathfrak{A}\mu \subset \mathfrak{D}$. 2. Ist \mathfrak{A} Ideal, so ist jedes Element von \mathfrak{S} Produkt eines Elementes aus \mathfrak{A} und des Inversen eines Nichtnullteilers aus \mathfrak{A} . 3. Die Ideale mit der Linksordnung \mathfrak{D} sind identisch mit den endlichen \mathfrak{D} -Moduln, die einen Nichtnullteiler enthalten. 4. In jeder Klasse von Links- (Rechts-) Idealen gibt es ein zu einem gegebenen ganzen Ideal primes ganzes Ideal. — Gibt es allgemein in einem nichtkommutativen Ring \mathfrak{S} mit Einheitselement, dessen Nichtnullteiler stets Inverse haben, ein System von als „Idealen“ bezeichneten Moduln mit den Eigenschaften 1 bis 4, so sagt Verf., daß in \mathfrak{S} eine reguläre Arithmetik erklärt ist. — In dem Schiefkörper k sei eine reguläre Arithmetik erklärt, \mathfrak{o} sei eine Einheit des Gruppoids, also eine Maximalordnung von k . Ein \mathfrak{o} -Linksmodul \mathfrak{M} heiße regulär, wenn aus $\alpha u = 0$, $\alpha \subset \mathfrak{o}$, $u \subset \mathfrak{M}$ stets $\alpha = 0$ oder $u = 0$ folgt. Mit Hilfe des Satzes, daß jeder reguläre \mathfrak{o} -Modul \mathfrak{M} vom Rang n Untermodul des Moduls \mathfrak{M}_k der Linearformen in n Unbestimmten mit Koeffizienten aus k ist, wird in Verallgemeinerung eines Satzes von I. Schur [Math. Ann. 71, 355ff. (1912)] gezeigt, daß jedes \mathfrak{M} die Gestalt $(1) \mathfrak{M} = \mathfrak{o}u_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{o}u_{n-1} \oplus \alpha u_n$ hat, α ein \mathfrak{o} -Linksideal, $u_i \in \mathfrak{M}_k$. Im Anhang II wird daraus die von E. Steinitz [Math. Ann. 71, 328; 72, 297 (1912)] stammende Elementarteilertheorie in algebraischen Zahlkörpern neu hergeleitet. (1) wird aber vor allem verwendet, um die Arithmetik der Matrizenalgebra \mathfrak{S} vom Grad n über k auf die von k zurückzuführen. \mathfrak{M}_k wird als \mathfrak{S} -Rechtsmodul aufgefaßt. Sind \mathfrak{M} und \mathfrak{M}' zwei \mathfrak{o} -Moduln vom Range n , so ist die Gesamtheit der Elemente φ aus \mathfrak{S} mit $\mathfrak{M}\varphi \subset \mathfrak{M}'$ ein Ideal $\{\mathfrak{M}, \mathfrak{M}'\}$ aus \mathfrak{S} . Es wird gezeigt, daß diese Ideale eine reguläre Arithmetik in \mathfrak{S} bilden. Die Ideale $\mathfrak{D} = \{\mathfrak{M}, \mathfrak{M}\}$ werden die Maximalordnungen. Hält man \mathfrak{M} fest, so erhält man, wenn \mathfrak{M}' alle \mathfrak{o} -Moduln durchläuft, genau alle Ideale mit \mathfrak{D} als Linksordnung. Dann und nur dann gehören $\{\mathfrak{M}, \mathfrak{M}'\}$, $\{\mathfrak{M}, \mathfrak{M}''\}$ zur selben Idealklasse, wenn $\mathfrak{M}', \mathfrak{M}''$ operatorisomorph sind. Aus (1) schließt man dann, daß die Anzahl der Klassen von Idealen mit der Linksordnung \mathfrak{D} höchstens gleich der der Klassen von Idealen aus k mit der Linksordnung \mathfrak{o} ist. Ist k kommutativ, so stimmen beide Anzahlen überein. Auch die Anzahl der Typen von Maximalordnungen in \mathfrak{S} läßt sich für kommutatives k bestimmen, sie ist gleich dem Index $(\mathfrak{K} : \mathfrak{K}^n)$, \mathfrak{K} die Gruppe der Idealklassen von k . Schließlich werden noch Beziehungen der Arithmetik in \mathfrak{S} zur Arithmetik der maximalen kommutativen Teilkörper von \mathfrak{S} untersucht.

G. Köthe (Münster i. W.).

Teller, James H. D.: A class of quaternion algebras. Duke math. J. 2, 280—286 (1936).

Let \mathfrak{A} be a rational generalized quaternion algebra with basis $1, i, j, ij$ where $i^2 = -1$, $j^2 = \alpha$, $ij = -ji$. It may be assumed that α is ± 1 or \pm a product of distinct primes of the form $4n + 3$. The case $\alpha \equiv 1 \pmod{4}$ was treated by Latimer (this Zbl. 13, 50). The author obtains similar theorems for $\alpha \equiv 3 \pmod{4}$, \mathfrak{A} now being a division algebra. Latimer extended the theory of Lipschitz integral quaternions and Hermitian forms $axx' + bx'y + b'xy' + cyy'$. The present paper similarly extends the theory of Hurwitz integral quaternions and Hermitian forms $axx' + \frac{1}{2}bx'y + \frac{1}{2}b'xy' + cyy'$. Every indefinite primitive form of this type represents 1. If \mathfrak{G} is the set of integral elements of \mathfrak{A} containing the basis numbers, and if $\alpha > 0$, every ideal in \mathfrak{G} is principal and \mathfrak{G} has a factorization theory similar to that of quaternions.

MacDuffee (Madison).

Albert, A. Adrian: Simple algebras of degree p^e over a centrum of characteristic p . Trans. Amer. Math. Soc. 40, 112—126 (1936).

Gegenstand der Arbeit sind die p -Algebren, das sind normale einfache Algebren vom p -Potenzgrad über einem Zentrum der Charakteristik $p \neq 0$ (vgl. Teichmüller,

dies. Zbl. 14, 199). Aus der Tatsache, daß jede p -Algebra rein inseparable Zerfällungskörper hat (Albert, dies. Zbl. 9, 195), wird in Verallgemeinerung eines früheren Resultates (dies. Zbl. 13, 102) bewiesen, daß eine p -Algebra vom Grade p^e genau dann zyklisch ist, wenn sie einen rein inseparablen Teilkörper $F(y)$, $y^{p^e} = \gamma$ aus F , vom Grade p^e über dem Zentrum F enthält. Beweishilfsmittel sind die Sätze über elementweise vertauschbare Teilalgebren einer einfachen Algebra, die Theorie der p -zyklischen Körper bei Charakteristik p (Albert, dies. Zbl. 10, 4; Witt, dies. Zbl. 13, 196) und einige einfache Sätze über inseparable Körper, unter denen der folgende bemerkenswert ist: Ist Z/K separabel, $K = F(y)$, $y^{p^e} = \gamma$ in F , δ beliebig in K , so gibt es ein c in Z , so daß $\delta N_{Z/K}(c)$ den Körper K über F erzeugt. — Aus dem angeführten Satze werden Folgerungen gezogen: Das direkte Produkt zweier zyklischer p -Algebren ist wieder zyklisch. Jede p -Algebra ist einer zyklischen p -Algebra ähnlich. Der Exponent p^e einer p -Algebra ist durch den kleinstmöglichen Exponenten e eines rein inseparablen Zerfällungskörpers gegeben. Jede p -Algebra vom Exponenten p^e ist zu einem direkten Produkt $D_1 \times D_2 \times \dots \times D_t$ von p -Divisionsalgebren D_i ähnlich, wo Exponent und Index von D_i gleich und nicht größer als p^e sind, während D_1 den Exponenten und Index p^e hat. Eine vom Verf. am Schluß ausgesprochene Vermutung ist nur eine schwächere Fassung dieses letzten Satzes. In der Formulierung von Theorem 2 ist ein Fehler unterlaufen; statt „ Z_0 is the field of all quantities α^{p^e} of Z , α in Z “ muß es heißen: Z_0 is the field obtained from F by adjunction of all quantities α^{p^e} , α of Z . Dementsprechend sind Formulierung und Beweis von Theorem 3 abzuändern.

Deuring (Leipzig).

Wichmann, Wolfgang: Anwendungen der p -adischen Theorie im Nichtkommutativen. Mh. Math. Phys. 44, 203—224 (1936).

Teil I handelt von einer Art Trägheitsgruppen für Algebren. k sei ein p -adischer Zahlkörper, \mathfrak{S} eine normale einfache Algebra über k , S die in \mathfrak{S} enthaltene Divisionsalgebra und \mathfrak{S} n -reihiger Matrizenring in S . Ist W maximaler unverzweigter Teilkörper von S (Trägheitskörper nach Hasse), so ist W_n eine maximale einfache Teilalgebra von \mathfrak{S} , in der p prim bleibt: Trägheitssystem. Wird als Hauptträgheitsgruppe Γ_T für eine Maximalordnung \mathfrak{Z} von \mathfrak{S} die Gesamtheit aller α aus \mathfrak{S} bezeichnet, für die $\alpha \mathfrak{Z} \alpha^{-1} = \mathfrak{Z}$, $\alpha \beta \alpha^{-1} \equiv \beta (\mathfrak{P})$ (\mathfrak{P} das Primideal von \mathfrak{Z}) für alle β aus \mathfrak{Z} gilt, so ist die Gruppe \mathfrak{G}_T der W_n elementweise fest lassenden Automorphismen von \mathfrak{S}/k — Trägheitsgruppe — isomorph zu der Faktorgruppe W^*/k^* ($W^* = W - \{0\}$, $k^* = k - \{0\}$), und W^* erweist sich als maximale abgeschlossene Untergruppe der Hauptträgheitsgruppe Γ_T . (Abgeschlossen heißt nach E. Noether eine multiplikative Untergruppe \mathfrak{H}^* einer einfachen Algebra \mathfrak{A} , wenn sie aus den Nichtnullteilern einer einfachen Teilalgebra \mathfrak{H} von \mathfrak{A} besteht.) Alle maximalen abgeschlossenen Untergruppen von Γ_T gehen durch innere Automorphismen von \mathfrak{S} auseinander hervor. Definiert man die Hauptverzweigungsgruppe Γ_V als die durch $\alpha \beta \alpha^{-1} \equiv \beta (\mathfrak{P}^2)$ gekennzeichnete Untergruppe von Γ_T , so wird die einzige maximale abgeschlossene Untergruppe von Γ_V gleich k^* , also die zugehörige Invariantenalgebra, das Verzweigungssystem, gleich der ganzen Algebra \mathfrak{S} . Die Übertragung aufs Große ist leicht: Γ_T wird wie oben definiert, \mathfrak{H}_T ist eine maximale abgeschlossene Untergruppe von Γ_T , der Invariantenbereich \mathfrak{S}_T von \mathfrak{H}_T ist eine maximale einfache Teilalgebra von \mathfrak{S} , in der p prim bleibt: Trägheitssystem \mathfrak{S}_T im Großen. Entsprechend ergibt sich \mathfrak{S} selbst als einziges Verzweigungssystem. — Teil II bringt zuerst die Darstellung der Zetafunktion einer Algebra über dem Körper der rationalen Zahlen durch die Zetafunktion des Zentrums, leitet dann aus dieser Darstellung die Funktionalgleichung ab; Vorzeichenvergleich mit der Heyschen Funktionalgleichung ergibt Teilaussagen der Hasseschen Summenformel (vgl. hierfür Zorn, dies. Zbl. 7, 297; Deuring, Algebren, Erg. d. Math. 4, 1, Kap. VII, § 8, 1—3). Weiter wird der Primidealsatz in der Gestalt

$$\sum_{N \not\equiv x} 1 = x/\log x + O(x/\log^2 x)$$

für die unzerlegbaren Linksideale \mathfrak{p} einer einfachen Algebra \mathfrak{A} verallgemeinert; er folgt aus dem Primidealsatz für das Zentrum, weil für die Anzahl A der \mathfrak{p} , die ein Primideal \mathfrak{p}_Z des Zentrums teilen, $A = (q^{g-1} - 1)/(q^g - 1)$ gilt, $q = N\mathfrak{p}_Z$, $(\mathfrak{A} : Z) = q^2$, κ der \mathfrak{p}_Z -Index von \mathfrak{A} . Schließlich wird bemerkt, daß ähnlich wie in Zahlkörpern für die Anzahl $H(x, \mathfrak{R})$ der ganzen Linksideale \mathfrak{a} einer Klasse \mathfrak{R} von \mathfrak{A} mit

$N\mathfrak{a} \leq x$ die asymptotische Formel

$$H(x, \mathfrak{R}) = \lambda x + O\left(x^{1-\frac{2}{n+1}}\right), \quad \neq \lambda x + O(x^\delta) \text{ für } \delta < \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}$$

gilt, wo $\lambda = \text{Res } \zeta(s, \mathfrak{R})$ und n der Rang von \mathfrak{A} über dem Körper rationalen Zahlen ist. Für $\mathfrak{A} = k(\sqrt{-1})$ erhält man bekannte Gitterpunktsabschätzungen für den Kreis, für \mathfrak{A} = gewöhnlicher Quaternionenkörper entsprechende Abschätzungen für die vierdimensionale Kugel. — Es muß noch bemerkt werden, daß der Schluß 3 beim Beweis von Satz 3, Teil I unvollständig ist, aber ergänzt werden kann, in ähnlicher Weise muß beim Beweis von Satz 4, Hilfssatz, noch gezeigt werden, daß ω_1 kein Nullteiler ist.

Deuring (Leipzig).

Deuring, Max: Automorphismen und Divisorenklassen der Ordnung l in algebraischen Funktionenkörpern. Math. Ann. **113**, 208—215 (1936).

Für einen algebraischen Funktionenkörper einer Unbestimmten vom Geschlecht g über dem Körper aller komplexen Zahlen als Konstantenkörper folgt aus dem Abel'schen Theorem und dem Jacobischen Umkehrsatz leicht, daß die Anzahl der Lösungen von $X^n = C$ in der Divisorenklassengruppe genau gleich n^{2g} ist. Sei jetzt K ein algebraischer Funktionenkörper einer Unbestimmten vom Geschlecht g über irgendeinem algebraisch-abgeschlossenen Konstantenkörper k . Um die Lösungsanzahlen T_n von $X^n = C$ in der Divisorenklassengruppe von K zu bestimmen, genügt es, für alle Primzahlen p die Lösbarkeit von $X^p = C$ nachzuweisen und die Lösungsanzahlen T_p von $X^p = 1$ zu bestimmen. Dann ist $T_n = \prod_{p|n} T_p^{\nu_p(n)}$ für $n = \prod_{p|n} p^{\nu_p(n)}$. Die Ergebnisse des Ref. für $g = 1$ (Abh. math. Semin. Hamburg. Univ. **10**, 325—348; Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, N. F. **1**, Fachgruppe I, 119—129; J. f. Math. **175**, 55—62; dies. Zbl. **11**, 197; **13**, 197) legen die Vermutung nahe, daß auch allgemein folgendes gilt:

$T_p = p^{2g}$, falls die Charakteristik von k von p verschieden ist,

$T_p = p^e$ mit $0 \leq e \leq g$, falls k die Charakteristik p hat.

Verf. zeigt hier, daß diese Vermutung im Einklang ist mit einem Satz, den er aus dem Verhalten der Divisorenklassen der Ordnung p von K bei einem Automorphismus σ der Ordnung p von K herleitet, und der die Anzahl T_p für K in Verbindung setzt mit der entsprechenden Anzahl für den Invariantenkörper K_0 des Automorphismus σ . Der Satz lautet folgendermaßen: Der algebraische Funktionenkörper K einer Unbestimmten über dem algebraisch-abgeschlossenen Konstantenkörper k sei separabel zyklisch vom Primzahlgrad p über K_0 . t Primdivisoren von K_0 seien in K verzweigt; es sei $t > 0$. In K_0 sei jede Divisorenklasse nullten Grades p -te Potenz von genau p^{e_0} Klassen. Hat k nicht die Charakteristik p , so ist jede Klasse nullten Grades von K die p -te Potenz von genau $p^{pe_0+(p-1)(t-2)}$ Klassen; hat k die Charakteristik p , so ist jede Klasse nullten Grades von K die p -te Potenz von genau $p^{pe_0+(p-1)(t-1)}$ Klassen. — Bei seinem Beweis wird der Normensatz von Tsen (Nachr. Ges. Wiss. Göttingen **1933**, 335—339; dies. Zbl. **7**, 294) angewendet. — In einem Zusatz bei der Korrektur stellt Verf. ohne Beweis fest, daß die Lösbarkeit von $X^p = C$ mittels der Methode des Ref. leicht allgemein beweisbar ist. — Es sei auch auf eine inzwischen erschienene Arbeit von Ref. und Witt (Mh. Math. Phys. **43**, 477—492; dies. Zbl. **13**, 341) hingewiesen, die mit dem hier behandelten Gegenstand in engem Zusammenhang steht.

H. Hasse (Göttingen).

Zahlentheorie:

Sarantopoulos, Spyridion: Quelques théorèmes sur les nombres entiers. (*Athènes*, 2.—9. IX. 1934.) Actes Congr. Interbalkan. Math. 59—61 (1935).

Vorläufige Mitteilung ohne Beweis einiger Sätze über Divisoren gewisser Zahlformen, die aus der Theorie der Potenzreste im rationalen Zahlkörper hergeleitet seien. Die beabsichtigten Anwendungen scheinen in Richtung des großen Fermatschen Satzes zu liegen.

Bessel-Hagen (Bonn).

Gupta, Hansraj: Minimum partitions into specified parts. Amer. J. Math. 58, 573 bis 576 (1936).

The author studies the minimum weight $x + y + z$ of integers ≥ 0 satisfying $n = x + ay + bz$, a and b being given integers such that $1 < a < b$. The unique solution X, Y, Z such that $0 \leq X < a$, $0 \leq X + aY < b$ gives the minimum weight if $r = 0$ or if $q + r \geq a$, where $b = qa + r$, $0 \leq r < a$ (hence if $b \geq a^2$). Otherwise, the least weight is given by $x = m$, $y = Y + jq + i$, $z = Z - j$, where

$$X + jr = ia + m, 0 \leq m < r, j = [(ia - X + r - 1)/r],$$

and i is to be the positive integer giving $\Delta(i) = i(a - 1) - j(q + r - 1)$ its greatest value. An upper limit s to i is obtainable by comparing the continued fractions for a/r and $(a - 1)/(q + r - 1)$. A table of values s is given for $a = 2^u$, $b = 3^u$, $u \leq 36$; and when $u = 13$ of sets of values X for which $\Delta(i)$ has the same maximum value.

G. Pall (Montreal).

Hua, Loo-keng: On Waring's problem with polynomial summands. Amer. J. Math. 58, 553—562 (1936).

Gelbcke's method (cf. this Zbl. 3, 150) for $P(x) = x^k$ is extended to any integral-valued polynomial $P(x) = \alpha_0 x^k + \dots + \alpha_k$, α_i rational, $\alpha_0 > 0$. Let d be the l. c. d. of the α_i . If $k \geq 3$ and $s \geq K(k - 2) + 5$, the number of representations of n as a sum of s values of $P(x)$ for integers $x \geq 0$ is given by

$$\alpha_0^{-s} P^s(1 + a) \{P(sa)\}^{-1} \mathfrak{S}_n n^{sa-1}$$

with an error $< c_1 n^{sa-1-a/K+s}$, where $K = 2^{k-1}$, $a = 1/k$, $c_1 = c_1(P, s, \varepsilon) > 0$, $\mathfrak{S}_n = A(1) + A(2) + \dots$, $A(q) = (1/q^{*s}) \sum S_{\rho}^s \rho^{-n}$ (summation over all primitive q -th roots ρ of unity), $q^* = q d_q$, (where $d = d_q d'$, $(d', q) = 1$, $p|q$ if $p|d_q$), and $S_{\rho} = \sum e^{P(z)}$ (summation over $z = 1, \dots, q^*$).

G. Pall (Montreal).

Pillai, S. S.: On Waring's problem. J. Indian Math. Soc., N. s. 2, 16—44 (1936).

Let $l = [(\frac{3}{2})^n]$, $j = [(\frac{4}{3})^n]$, and $r = 3^n - l \cdot 2^n$. The author proves: (1) If $n \geq 30$ and $r \leq 2^n - l - 3$, then $g(n) = 2^n + l - 2$. (2) If $r \geq 2^n - l$ then $g(n) \geq 2^n + l + j - 3$. (3) $g(n) = 2^n + l + O(j)$. (4) When $8 \leq n \leq 100$, $g(n) = 2^n + l - 2$. (5) If $K(x)$ denotes the number of n 's less than x for which $g(n) = 2^n + l - 2$, then

$$K(x) \geq \frac{\log 4 - \log 3}{\log 3} x + O(1).$$

The work for large integers follows the Vinogradoff method. Let $\log \beta = \frac{25n^{5\frac{1}{2}}}{2}$.

Then, if $n \geq 8$, every integer $\geq \beta$ is the sum of $(2^n + l - 2)n$ -th powers. The integers $\leq \beta$ are considered by a method of ascents. The paper concludes with a table of the values of 2^n , l and r for $n \leq 100$.

Wright (Aberdeen).

Chowla, S.: Pillai's exact formula for the number $g(n)$ in Waring's problem. Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A 3, 339—340 (1936).

With the notation of the preceding abstract, Pillai has shown that, if

$$(\frac{4}{3})^n + 2(\frac{5}{4})^n \leq r \leq 2^n - (\frac{3}{2})^n - (\frac{4}{3})^n - 2(\frac{5}{4})^n, \quad (1)$$

then, for $n > n_0$, $g(n) = 2^n + l - 2$. The author shows that (1) is true for infinitely many n . This he deduces from the theorem: Let $f(n)$ denote the fractional part of $(\frac{3}{2})^n$. Then the inequality $\frac{1}{6} \leq f(n) \leq \frac{5}{6}$ is true for infinitely many n . *Wright* (Aberdeen).

Padhy, Brojomohan: Pillai's exact formula for the number $g(n)$ in Waring's problem. Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A 3, 341—345 (1936).

Let $g(n, \delta)$ denote the least number of non-negative n -th powers required to represent every positive integer $\leq \delta$. The author gives a modified proof of one of Pillai's results. In fact, he proves: If A is any fixed positive number, if $n > n_0(A)$ and if condition (1) of the preceding abstract is satisfied, then $g(n, n^A) = 2^n + l - 2$.
Wright (Aberdeen).

Vinogradov, I.: On asymptotic formula in Warings problem. Rec. math. Moscou, N. s. 1, 169—174 (1936).

The Hardy-Littlewood asymptotic formula for the number of representations of an integer N as a sum of r n -th powers is proved to be valid for $r > 131 n^5 (\log n)^2$ if $n \geq 20$, the error term being $O(N^{r/n-1-\delta})$ with $\delta = 1/140$. Cf. this Zbl. 12, 247; 13, 53, 200, 201, 393.
G. Pall (Montreal).

Gruppentheorie.

Dietzmann, A. P., und S. A. Čunikhin: Über Klassen und Zentrum einer endlichen Gruppe. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 2, 311—313 (1936).

Eine Behandlung der Frage nach Existenz einer Klasse von konjugierten Elementen mit vorgegebener Ordnung in einer endlichen Gruppe. Eine Klasse soll als p^i -Klasse bezeichnet werden, wenn ihre Ordnung durch p^i teilbar ist; p eine Primzahl. Geht p in der Ordnung einer Gruppe \mathfrak{G} auf, und enthält das Zentrum von \mathfrak{G} keine zu p gehörige Sylowuntergruppe von \mathfrak{G} , so besitzt \mathfrak{G} mindestens eine p -Klasse. Ist \mathfrak{G} eine Gruppe ohne Zentrum und ist die zu p gehörige Sylowuntergruppe von \mathfrak{G} keine abelsche Gruppe vom Typus $(1, 1, \dots, 1)$, so besitzt \mathfrak{G} mindestens eine p^2 -Klasse. Besitzt eine Gruppe \mathfrak{G} ohne Zentrum nur eine einzige p -Klasse, so ist diese Klasse eine p^α -Klasse, wo p^α die maximale in die Ordnung von \mathfrak{G} aufgehende Potenz von p ist.

A. Kurosch (Moskau).

Kulakoff, A.: Sur quelques propriétés des groupes finis. Rec. math. Moscou, N. s. 1, 253—255 u. franz. Zusammenfassung 256 (1936) [Russisch].

Beweis der Sätze: 1. Wenn der Normalisator einer zyklischen Untergruppe $\{P\}$ der Gruppe G mit $\{P\}$ übereinstimmt und die Ordnung von P eine ungerade Primzahl ist, so sind die Elemente P^{i+1} und $PQ^{-1}P^iQ$ ($i \neq -1$), wo Q ein beliebiges Element von G ist, miteinander konjugiert. 2. Besitzt eine Gruppe G Erzeugende P, Q und definierende Relationen $P^p = Q^k = 1$, $P^{-1}QP = Q^\alpha$, wo p eine ungerade Primzahl ist, so sind die Elemente P^{i+1} und $PQ^{-1}P^iQ$ ($i \neq -1$) miteinander konjugiert. — Diese zwei Ergebnisse sind Sonderfälle eines allgemeinen ungelösten Problems, das, wie der Verf. in C. R. Acad. Sci., Paris 199, 116—119 (1934) (dies. Zbl. 9, 202) zeigt, mit dem Burnsidischen Problem über Nichteinfachheit der Gruppen von einer ungeraden Ordnung eng verknüpft ist.

A. Kurosch (Moskau).

Kulakoff, A.: Einige Anwendungen der Theorie der Gruppencharaktere. Math. Ann. 113, 216—225 (1936).

Frühere Sätze des Autors (s. dies. Zbl. 9, 202) werden ausführlich bewiesen. Der Beweis des Satzes: „In einer Gruppe G der ungeraden Ordnung $g = 2n + 1$ sei P ein Element der Ordnung p , wobei p der kleinste Primteiler von g ist; wenn dann für $i = 1, \dots, p - 2$ und jedes Element Q aus G stets P^{i+1} und $PQ^{-1}P^iQ$ konjugiert sind, ist G nicht einfach“ wird mit Hilfe der Darstellungstheorie geführt. Dabei ergeben sich für beliebige endliche Gruppen G die Sätze: Sind Γ_u ($u = 1, \dots, r$) die verschiedenen irreduziblen Darstellungen von G , Γ_{uG^*} die in ihnen enthaltenen Darstellungen einer Untergruppe G^* von G , $\Gamma_{uG^*} = \sum_v k_{uv} \gamma_v$, wobei die k_{uv} nichtnegative ganze Zahlen sind und γ_v die verschiedenen irreduziblen Darstellungen von G^* durchläuft, so ist G^* dann und nur dann Normalteiler von G , wenn $\sum_{u=1}^r k_{u1}^2 = \frac{g}{g^*}$ ist, wobei g^* die Ordnung

von G^* ist. Ist G^* insbesondere die von P erzeugte zyklische Untergruppe von G , so gilt, falls nur p zu $g-1$ teilerfremd ist: (h = Ordnung der Klasse von P)

$$\sum_{u=1}^r k_{uv} k_{uw} = \frac{g(h-1)}{p^2 h} \quad (\text{für } w \neq v), \quad \text{und} \quad \sum_{u=1}^r k_{uv}^2 = \frac{g(h+p-1)}{p^2 h}.$$

Magnus (Frankfurt a. M.).

Marty, F.: Rôle de la notion d'hypergroupe dans l'étude des groupes non abéliens. C. R. Acad. Sci., Paris **201**, 636—638 (1935).

The author defines the homomorphism of normal or completely regular hypergroups (this Zbl. **12**, 53) and also a quotient hypergroup G/g of a group G by any subgroup g . The principal lemmas of homomorphism and isomorphism in the theory of quotient groups may be extended with some modification to the theory of quotient hypergroups.

Engström (New Haven).

● **Silberman-Roman, Emanuel: Sur les réseaux Moebius aux symétries cristallines.** Avant-propos de L. Mrazec. Paris: Les presses univ. de France 1936. 191 pag. Frcs. 20.—.

Verf. leitet unter der Voraussetzung der Existenz einer Translationsuntergruppe in jeder Raumgruppe die ebenen und räumlichen Translationsgitter in analytisch-projektiver Darstellungsweise ab, indem er den Kristallraum als Moebiusches Gitter, welches die unendlich ferne Ebene enthält, auffaßt. Außerdem wird auf die Beziehungen zwischen Symmetrie und Isotropie bzw. Anisotropie hingewiesen. W. Nowacki.

Toyoda, Kôshichi: On the structure of Lie's continuous groups. Sci. Rep. Tôhoku Univ., I. s. **25**, 338—343 (1936).

Neuer Beweis des Cartanschen Satzes: Eine halbeinfache Infinitesimalgruppe ist dann und nur dann einfach, wenn das System der Wurzelvektoren nicht in zwei gegenseitig orthogonale Teilsysteme gespalten werden kann, sowie der Folgerung: Eine halbeinfache Infinitesimalgruppe ist direktes Produkt von einfachen. van der Waerden.

Auerbach, Herman: Sur la représentation analytique des groupes de Lie. C. R. Acad. Sci., Paris **203**, 421—423 (1936).

Sind u_1, \dots, u_r infinitesimale Erzeugende einer auflösbaren Lieschen Gruppe G und so gewählt, daß u_1, \dots, u_i eine Untergruppe G_i erzeugen und daß G_i Normalteiler in G_{i+1} ist, so stellt der Ausdruck

$$e^{t_1 u_1} e^{t_2 u_2} \dots e^{t_r u_r}$$

die ganze Gruppe dar. Bei passender Wahl der Gruppen G_i stellt auch

$$e^{t_1 u_1 + \dots + t_p u_p} e^{t_{p+1} u_{p+1} + \dots + t_r u_r}$$

die ganze Gruppe dar. In einer auflösbaren Gruppe ist demnach jedes Element ein Produkt von zwei, in einer nichtauflösbaren Gruppe aber Produkt von höchstens vier Faktoren, welche je von einer infinitesimalen Transformation erzeugt werden.

van der Waerden (Leipzig).

Mengenlehre und reelle Funktionen.

Cesari, Lamberto: Sulle funzioni a variazione limitata. Ann. Scuola norm. super. Pisa, II. s. **5**, 299—313 (1936).

Tonelli, Leonida: Sulle funzioni di due variabili generalmente a variazione limitata. Ann. Scuola norm. super. Pisa, II. s. **5**, 315—320 (1936).

Tonelli (Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. **3**, 357—362) has defined a class T of functions $f(x, y)$ of bounded variation, and shown that, f being continuous, $f \in T$ is n. and s. that the surface $z = f(x, y)$ have (finite) Lebesgue area. Recently Adams and Clarkson (see this Zbl. **10**, 199; see also Gergen, this Zbl. **6**, 112—113, and Morrey, this Zbl. **8**, 72) extended the class T to \bar{T} in a natural way to admit

more discontinuous functions; they proved that both the properties $f \in T$ and $f \in \bar{T}$, when f is discontinuous, sometimes depend upon the direction of the x -axis. Cesari defines T^* [\bar{T}^*] as the class of functions f each of which $\in T$ [\bar{T}] when the value of f on a suitable set E of plane measure 0 is neglected. He shows that the property $f \in T^* \cdot M$ (M = the class of "quasi-continuous", or plane measurable, functions) is independent of the x -direction, although the neglected set E may vary with this direction; proves $\bar{T}^* \cdot M \subset T^*$; and extends Tonelli's earlier result by showing that $f \in T^* \cdot M$ is n. and s. that $z = f(x, y)$ have (finite) area in a generalized Lebesgue sense (according to which convergence of the approximating polyhedral surfaces to $z = f(x, y)$ is required only almost everywhere). — Tonelli shows how a modification, necessitated by the "essentially more general and difficult" situation now in hand, can be made of his own earlier demonstration to prove that $f \in T^* \cdot M$ implies that $z = f(x, y)$ has generalized area as here defined. C. R. Adams (Providence).

Popovici, C.: Fonctions bornées en chaque point d'un intervalle et pourtant non bornées sur l'intervalle. (*Athènes*, 2.—9. IX. 1934.) Actes Congr. Interbalkan. Math. 51—53 (1935).

L'auteur donne une expression analytique représentant une fonction, qui est finie et en même temps non bornée en chaque point x d'un segment (a, b) , c.-à-d. pas bornée dans aucun intervalle contenant x . J. Ridder (Groningen).

Kritikos, N.: Sur une condition nécessaire et suffisante pour la continuité d'une fonction de plusieurs variables et quelques applications. (*Athènes*, 2.—9. IX. 1934.) Actes Congr. Interbalkan. Math. 219—224 (1935).

$Q = (x_1, \dots, x_q)$ und $R = (y_1, \dots, y_r)$ durchlaufen Gebiete E_x bzw. E_y im q - bzw. r -dimensionalen Raum. Es wird eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür aufgestellt, daß eine Funktion $f(Q, R)$ an der Stelle $P_0 = (Q_0, R_0)$ von $P = (Q, R)$ stetig abhängt. Die in Q und R unsymmetrische Bedingung besagt: In jeder zu E_x gehörigen Umgebung von Q_0 soll es wenigstens einen Punkt Q geben, so daß $f(Q, R)$ als Funktion von R in R_0 stetig ist, und es soll die Grenzwertänderung [im Sinne von Carathéodory, Math. Ann. 101, 522 (1929)] der Schar der Funktionen $f(Q, R)$ von Q , wo R als Scharparameter aufgefaßt wird, an der Stelle (Q_0, R_0) verschwinden. Als Anwendungen ergeben sich Sätze der folgenden Art: $f(x_1, \dots, x_q, y_1, \dots, y_r)$ sei stetig in bezug auf $Q = (x_1, \dots, x_q)$ bei festem $R = (y_1, \dots, y_r)$ und stetig und monoton in bezug auf jedes einzelne y_e . Dann ist f stetig in bezug auf alle Variablen. Ferner Verallgemeinerungen früherer Resultate des Verf. (vgl. dies. Zbl. 4, 343). W. Fenchel.

Radó, Tibor: A remark on the area of surfaces. Amer. J. Math. 58, 598—606 (1936).

Sufficient conditions that the Lebesgue area $L(\Sigma)$ of a continuous surface $\Sigma: x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$ ($0 \leq u \leq 1$, $0 \leq v \leq 1$), be given by the classical formula $L(\Sigma) = \int_0^1 \int_0^1 (EG - F^2)^{1/2} du dv$ have been given by McShane (this Zbl. 8, 72)

and by Morrey (this Zbl. 8, 72). The author shows that by a modification of a portion of Morrey's proof, the same conclusion can be obtained when the hypothesis that the functions $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ be absolutely continuous in the sense of Tonelli is replaced by the weaker hypotheses that these functions be of bounded variation in the sense of Tonelli. Graves (Chicago).

Freudenthal, Hans: Zur Abstraktion des Integralbegriffs. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 39, 741—746 (1936).

Der Bereich A der „Integrationsintervalle“ ist eine teilweise geordnete Menge, in der die 0 und die untere Grenze von endlich viel Elementen existieren. Weiter wird für die Elemente a aus A der Bereich $Z(a)$ der (direkten) Zerlegungen $z(a)$ von a eingeführt. — Der Bereich W der Funktionswerte besitze eine kommutative und assoziative stetige Addition und einen vernünftigen Limesbegriff für Mengen, deren Elemente durch Indizes aus geeignet teilweise geordneten Mengen gekennzeichnet sind.

Dann ist die Summe einer unendlichen Teilmenge M von W der Limes der Summen aller endlichen Teilmengen von M . — Sei f eine eindeutige Funktion der Elemente von A mit Werten in W . Dann ist $f(z(a))$ die Summe der $f(a_i)$ mit a_i in $z(a)$, und $\int_a f(dx)$ ist der Limes der Menge aller $f(z(a))$ mit $z(a)$ in $Z(a)$. — Auf diese Verallgemeinerung des gewöhnlichen Integralbegriffs kann dann eine analoge Verallgemeinerung des Stieltjesschen Integrals gegründet werden. *Reinhold Baer* (Princeton, N. J.).

Analysis.

Klose, A.: Die Differentialoperationen der Vektorrechnung. *Deutsche Math.* **1**, 341 bis 349 (1936).

This paper attempts to give new definitions of the basic concepts of vector analysis (gradient, divergence, curl etc.). The attempt relies on the relation $\mathbf{v} = \frac{3}{4\pi} \int_K \mathbf{e}(\mathbf{e} \cdot \mathbf{v}) d\omega$

where \mathbf{v} is an arbitrary vector and \mathbf{e} is the unit vector normal to the surface element $d\omega$ of the unit sphere K (\mathbf{v} being independent of \mathbf{e}). It is shown that the gradient of any scalar point function u may be expressed in terms of its directional derivative $\frac{du}{ds}$ by means of the formula $\text{grad } u = \frac{3}{4\pi} \int_K \mathbf{e} \frac{du}{ds} d\omega$ and similar expressions are given for

the divergence and curl of a vector field \mathbf{v} . The paper closes with a discussion of the Gauss integral theorem. *Murnaghan* (Baltimore).

Oeconomou, A. C.: Sur une équation fonctionnelle. (*Athènes*, 2.—9. IX. 1934.) *Actes Congr. Interbalkan. Math.* 215—218 (1935).

Die einzigen für $x=0$ differenzierbaren Lösungen von $f(kx) = kf(x)$, k eine natürliche Zahl, sind die homogenen linearen Funktionen. Die einzigen in einem Intervall beschränkten, konvexen Lösungen von $f(2x) = 2f(x)$ bestehen aus 2 vom Nullpunkt ausgehenden Halbstrahlen. Anwendung auf $f(x+y) = f(x) + f(y)$.

W. Fenchel (Kopenhagen).

Kritikos, N.: Sur quelques inégalités ayant lieu entre trois quantités liées par la relation $x+y+z=xyz$ et quelques applications au triangle. (*Athènes*, 2.—9. IX. 1934.) *Actes Congr. Interbalkan. Math.* 157—158 (1935).

Für 3 reelle Zahlen, die der im Titel genannten Relation genügen, ist $x^n + y^n + z^n$ für ungerades n stets von 0 verschieden und hat dasselbe Vorzeichen wie $x + y + z$ bzw. $x^{-1} + y^{-1} + z^{-1}$, je nachdem n positiv oder negativ ist. Anwendung auf den Fall $x = \text{tg } \alpha$, $y = \text{tg } \beta$, $z = \text{tg } \gamma$, wo $\alpha + \beta + \gamma = 2\pi$, für den auch schärfere Abschätzungen angegeben werden.

W. Fenchel (Kopenhagen).

Hardy, G. H.: A note on two inequalities. *J. London Math. Soc.* **11**, 167—170 (1936).

1. Für die Ungleichung $(\sum a_n)^4 < \pi^2 \sum a_n^2 \sum n^2 a_n^2$ von Carlson (dies. Zbl. **9**, 342) werden zwei einfache Beweise gegeben. 2. Nach Grüss (dies. Zbl. **10**, 16, vgl. Landau, dies. Zbl. **10**, 396) gilt für in $(0, a)$ vollmonotone Funktionen f und g mit $F_1 \leq f \leq F_2$, $G_1 \leq g \leq G_2$ die Ungleichung $|D(f, g)| \leq \frac{4}{15} (F_2 - F_1)(G_2 - G_1)$,

wo $D(f, g) = \frac{1}{a} \int_a^0 f g dx - \frac{1}{a^2} \int_0^a f dx \int_0^a g dx$; hierbei ist $\frac{4}{15}$ die bestmögliche Konstante.

Als Ergänzung hierzu wird bewiesen, daß für in $(0, \infty)$ vollmonotone Funktionen die Konstante $\frac{4}{15}$ für jedes a durch $\frac{1}{12}$ ersetzt werden kann, und daß $\frac{1}{12}$ die bestmögliche Konstante ist. Eine Funktion f wird dabei vollmonoton genannt, wenn $f \geq 0$, $f' \leq 0$, $f'' \geq 0$, $f''' \leq 0$, ... Der Beweis beruht auf der S. Bernsteinschen Darstellung $f(x) = \int_0^\infty e^{-xt} d\chi(t)$ mit $d\chi \geq 0$ für in $(0, \infty)$ vollmonotone Funktionen. —

Inzwischen ist das Grüsssche Ergebnis von Landau [Prace mat.-fiz. **44**, 337—351 (1936)] durch Ersetzen der vollen mit der vierfachen Monotonie verschärft worden.

B. Jessen (Kopenhagen).

Haviland, E. K.: On an asymptotic expression for a certain integral. Quart. J. Math., Oxford Ser. **7**, 152—157 (1936).

The integral in question is

$$K = \int_0^{+\infty} \exp[\alpha x - \Phi(x)] dx.$$

Following assumptions are made: $\Phi, \Phi', \Phi'' \geq 0$ and monotonically increasing to $+\infty$, $\Phi''' > 0$ if $x > 0$, $\lim \Phi'''/\Phi''$ and $\lim \psi/\Phi''$ exist (finite or infinite) if $x \rightarrow \infty$ where ψ is an L -function in the sense of Hardy, Orders of Infinity. Then

$$K \cong \exp[\xi \Phi'(\xi) - \Phi(\xi)] \{2\pi/\Phi''(\xi)\}^{1/2}$$

holds where $\Phi'(\xi) = \alpha$. This statement was formulated by Le Roy 36 years ago, however without a precise formulation of the assumptions and without a satisfactory proof.

G. Szegő (St. Louis, Mo.).

Ward, Morgan, and F. B. Fuller: The continuous iteration of real functions. Bull. Amer. Math. Soc. **42**, 393—396 (1936).

The problem of the continuous iteration of a real continuous steadily increasing function, E , is handled by the method of Ward (see this Zbl. **10**, 161). The authors show that every continuous steadily increasing solution of the basic equation $\Psi(x+1) = E \Psi(x)$ is of the form $\Psi(x) = E_{[x]}(\theta(x - [x]))$ where $[u]$ denotes the greatest integer in u , and $\theta(x)$ is a continuous steadily increasing function for $0 \leq x < 1$ with $\theta(0) = 0$, $\theta(1-0) = 1$; and conversely. Other references are to A. Korkine, A. A. Bennett, J. F. Ritt and W. Chayoth. *Albert A. Bennett* (Providence).

Cotton, Émile: Sur les singularités de certaines intégrales. J. Math. pures appl., IX. s. **15**, 207—224 (1936).

L'A. démontre que si F et G sont deux fonctions, réelles, holomorphes des variables $x, y_1, y_2 \dots y_n$, la fonction F vérifiant en plus quelques conditions supplémentaires lorsque différentes variables sont nulles ($F = 0$ à l'origine, $F > 0$, et a un minimum $= 0$ lorsque $y_1 = y_2 = \dots y_n = 0$), l'intégrale $\int \frac{G}{F^\alpha} dx$, $\alpha > 0$, est une somme d'une partie critique de la forme $\frac{G_1}{F_1^{\alpha-\frac{1}{2}}}$ [G_1, F_1 hol. de $y_1, y_2, \dots y_n$, $F_1(0, 0 \dots 0) = 0$] et d'une fonction continue des paramètres. Il faut ajouter un autre terme (logarithmique) si $\alpha - \frac{1}{2}$ est un entier positif. L'A. donne des résultats semblables lorsqu'on intègre par rapport à plusieurs variables. Il donne quelques applications à certains potentiels de simple on double couche.

Mandelbrojt (Clermont-Ferrand).

Avakumović, V., and J. Karamata: Über einige Taubersche Sätze, deren Asymptotik von Exponentialcharakter ist. I. Math. Z. **41**, 345—356 (1936).

Angeregt durch Untersuchungen von Hardy und Ramanujan [Proc. London Math. Soc. **16**, 112—132 (1916); **17**, 75—115 (1917)], wird zunächst der folgende O -Inversionssatz bewiesen: Es sei $A(t) \geq 0$ und nicht abnehmend für $t \geq 0$, ferner kon-

vergiere das Integral $J(\sigma) = \int_0^\infty e^{-\sigma t} A(t) dt$ für $\sigma > 0$. Aus

$$m x^k e^x < J(\sigma) < M x^k e^x, \quad \frac{1}{\sigma} = x \rightarrow \infty \quad (k, m, M \text{ Konstante}),$$

folgt

$$e^{2\sqrt{t}-\alpha} \sqrt[4]{t} \sqrt{\log t} < A(t) < M t^{\frac{k-1}{2}} e^{2\sqrt{t}}, \quad \alpha > 2, \quad t > t(\alpha).$$

Ferner wird an Beispielen gezeigt, daß diese Abschätzungen den bestmöglichen nahekommen; schließlich wird die Monotonievoraussetzung von $A(t)$ in bekannter Weise verallgemeinert.

Otto Szász (Cincinnati, Ohio).

Karamata, J.: Bemerkung zur Note „Über einige Inversionssätze der Limitierungsverfahren“. Publ. Math. Univ. Belgrade **4**, 181—184 (1935).

The author extends his previous work by showing that the condition

$$\int_0^c [\varphi(0) - \varphi(t)] \frac{dt}{t} < \infty$$

in the inversion theory of the integral $\int_0^\infty \varphi(\sigma t) d[s(t)]$ (see this Zbl. **7**, 245) which had been shown superfluous in the case of a two-sided Tauberian condition (this Zbl. **11**, 398) can now be dispensed with also in the one-sided case. As a consequence, the author's present version of Wiener's theorem reads. Let $\varphi(0) = 1$, $\varphi(t)$ continuous

and non-decreasing, $\int_1^\infty \varphi(t) \frac{dt}{t} < \infty$, $\int_0^\infty t^u d[\varphi(t)] \neq 0$ for every real u . Let $s(t)$ be of bounded variation and let $\Phi(\sigma) = \int_0^\infty \varphi(\sigma t) d[s(t)]$ converge for $\sigma > 0$. From $\Phi(\sigma) \rightarrow s$ as $\sigma \rightarrow 0$ with

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \min_{t \leq t' \leq \lambda t} \{s(t') - s(t)\} > -w(\lambda) \rightarrow 0, \quad 1 < \lambda \rightarrow 1,$$

follows $s(t) \rightarrow s$ when $t \rightarrow \infty$.

E. Hille (New Haven, Conn.).

Ramaswami, V.: The generalized Abel-Tauber theorem. Proc. London Math. Soc., II. s. **41**, 408—417 (1936).

Es werden einerseits die Beziehungen zwischen den Oszillationsgrenzen von $\int_0^\infty \Phi(\sigma t) d\{s(t)\}$, ($\sigma \rightarrow 0$) und $s(t)$, ($t \rightarrow \infty$) untersucht und bewiesen: Sei $s(t)$ in jedem endlichen Intervall von beschränkter Schwankung, $s(0) = 0$, $\Phi(t)$ nicht zunehmend, $\Phi(0) > 0$, $\int_1^\infty \Phi(t) dt/t$ konvergent und $H(\sigma) = \liminf_{P=\infty} \int_0^P \Phi(\sigma t) d\{s(t)\}$ für jedes $0 < \sigma \leq \delta$ beschränkt. Aus $s(u) - s(t) > -w$ für jedes $t \leq u \leq \lambda t$, λ fest > 1 , folgt dann $s(t) = O(1)$, $t \rightarrow \infty$ (vgl. vorsteh. Referat), und zwar ist $\text{osc}_{t=\infty} H(\sigma) = |\Phi(0)| \text{osc}_{t=\infty} s(t)$, falls $\liminf_{\lambda=1} \frac{1}{\lambda-1} \liminf_{t=\infty} \lim_{t < u \leq \lambda t} \{s(u) - s(t)\} \geq 0$ ist. — Andererseits wird die Littlewood-Schmidtsche Umkehrung des Abelschen Stetigkeitssatzes nach zwei Richtungen ergänzt, indem zuerst gezeigt wird, daß $s(t) \rightarrow 0$, falls $\int_0^\infty e^{-\sigma t} d\{s(t)\} \rightarrow 0$ und nur

$\lim_{u, t=\infty} \inf_{t < u \leq \lambda t} \{s(u) - s(t)\} > -\infty$, $\lim_{\lambda=1} \lim_{u, t=\infty} \inf_{t \in E; t < u \leq \lambda t} \{s(u) - s(t)\} \geq 0$ ist, falls das Maß der Komplementärmenge von E in $(0, t)$ gleich $o(t)$ ist. Die zweite Ergänzung besagt, $w(\lambda) = \liminf_{u, t=\infty} \lim_{t < u \leq \lambda t} \{s(u) - s(t)\}$ gesetzt, daß $0 \geq w(\infty) \geq 2w(1) \geq -\infty$ ist, falls $\lim_{\sigma=0} \int_0^\infty e^{-\sigma t} d\{s(t)\}$ vorhanden ist, welcher Satz die tiefliegende Littlewoodsche

Umkehrung unmittelbar auf die elementare Taubersche zurückführt. *Karamata*.

Ríos, S.: Ein Satz über die Singularitäten der Laplace-Stieltjes-Integrale. Bol. Semin. mat. Argent. **4**, 81—84 (1935) [Spanisch].

L'A. indique des conditions portant sur la fonction $B(\lambda) = \alpha(\lambda) - \beta(\lambda)$, permettant d'affirmer que les deux fonctions $f(s) = \int_0^\infty e^{-\lambda s} d\alpha(\lambda)$, $\varphi(s) = \int_0^\infty e^{-\lambda s} d\beta(\lambda)$ possèdent le même ensemble de points singuliers. Il en tire une généralisation du théorème de Fabry pour les intégrales de Laplace-Stieltjes. *Mandelbrojt*.

Ríos, S.: Ein Satz über die Singularitäten der Integrale von Laplace-Stieltjes. Rev. mat. hisp.-amer., II. s. **11**, 26—29 (1936) [Spanisch].

Réimpression du travail analysé plus haut. *Mandelbrojt* (Clermont-Ferrand).

Levinson, Norman: On a class of non-vanishing functions. Proc. London Math. Soc., II. s. **41**, 393—400 u. 401—407 (1936).

L'A. démontre un théorème énoncé récemment et concernant les séries de Fourier [Proc. Cambridge Philos. Soc. **31**, 336 (1935); voir ce Zbl. **12**, 213; l'auteur signale une erreur typogr. dans le mémoire cité]. Il démontre aussi des théorèmes portant sur les transformées de Fourier. Nous signalerons celui-ci: Soit $F(x) \in L^p(-\infty, \infty)$

($1 \leq p \leq 2$), $G(u) \sim (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} F(x) e^{iux} dx$, $G(u) = O(e^{-\theta(u)})$ ($u > 1$), où θ est une fonction positive, non décroissante, telle que $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\theta(u)}{u^2} du = \infty$; dans ces conditions si F est nulle dans un intervalle, elle est nulle partout. *Mandelbrojt* (Clermont-Ferrand).

Offord, A. C.: Note on the uniqueness of the representation of a function by a trigonometric integral. J. London Math. Soc. **11**, 171—174 (1936).

It is shown that, if $\varphi(u)$ is integrable L in every finite interval, and

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\omega}^{\omega} \varphi(u) e^{ixu} du = 0$$

for all x , then $\varphi(u)$ vanishes almost everywhere. Unlike in known theorems on the uniqueness of trigonometrical integrals [cf., e.g., Pollard, Proc. London Math. Soc. **25**, 451—468 (1926)] no further hypothesis is made about the behaviour of the function $\varphi(u)$ for $u \rightarrow \pm \infty$. A number of more general results is stated without proof.

A. Zygmund (Wilno).

Takahashi, Tatsuo: On the conjugate function of an integrable function and Fourier series and Fourier transform. Sci. Rep. Tôhoku Univ., I. s. **25**, 56—78 (1936).

Putting $\varphi(x) = \frac{|x|}{|\log|x||^{1+\varepsilon+1}}$, $\varepsilon > 0$, the author proves for functions $f(x) \in L^1(0, 2\pi)$ and their conjugates $g(x)$ the relations (1) $\int_0^{2\pi} \varphi(g(x)) dx \leq A \int_0^{2\pi} |(f(x))| dx$ and (2) $\int_0^{2\pi} \varphi(f(x) - s_n(x)) dx \rightarrow 0$; and for functions $f(x) \in L^1(-\infty, \infty)$ and their conjugates $g(x)$ the relations (3) $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(g(x)) dx \leq A \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$ and (4) $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(f(x) - f_a(x)) dx \rightarrow 0$ as $a \rightarrow \infty$. — (1) is virtually equivalent to a relation of Titchmarsh, (2) generalizes a theorem of Kolmogoroff, and (3) and (4) are new analogues of these theorem for non-periodic functions. — Other theorems of the type (4). *Bochner* (Princeton).

Bird, Marion T.: On generalizations of sum formulas of the Euler-Maclaurin type. Amer. J. Math. **58**, 487—503 (1936).

For the equation $[F(x + \omega) - F(x)]/\omega = \varphi(x)$, φ known, solutions $F(x)$ are sought in the form

$$F(x + \omega y) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \omega^{\nu+1} A_{\nu+1, r}(y) \varphi^{(\nu)}(x), \quad (r = 0, 1, 2, \dots),$$

where $A_{\nu, r}(y)$ is defined by the Laurent expansion (see v. Koch, Ark. Mat. Astron. Fys. **15**, No. 26)

$$\omega e^{\omega y z} / (e^{\omega z} - 1) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \omega^{\nu+1} A_{\nu+1, r}(y) z^{\nu}, \quad 2r\pi < |\omega z| < 2(r+1)\pi, \quad (r = 0, 1, 2, \dots).$$

In the first (real domain) case a "modified Euler-Maclaurin expansion formula" and a similar "sum formula" are derived as an aid to the determination of a "modified principal solution" by means of a limit process (already employed by Nörlund, Acta math. **44**, 71—211, in what now appears as a particular case); for $\varphi(x) \in C^{(m)}$ on $x \geq b$, the modified principal solution (continuous) is provided by a modified E.-M. sum formula. In the second (complex domain) case φ is assumed entire; a classification

(unpublished) of entire functions due to Carmichael, Martin, and Bird is used; "generalized" E.-M. expansion and sum formulas are obtained; and a modified principal solution (analytic in x for all finite x and in ω for ω interior to a certain circle about the origin) is determined, when φ is of exponential type q . *C. R. Adams.*

Leja, F.: Sur une suite de fonctions liée aux ensembles plans fermés. *Ann. Soc. Polon. Math.* **13**, 53—58 (1935).

Let $z_0, z_1, z_2, \dots, z_n$ be variable points of a closed set M . Putting

$$C_n(z) = \min_{z_\nu \prec M} \max_{(\nu)} \frac{|z - z_\nu|^n}{|(z_\nu - z_0)(z_\nu - z_1) \dots (z_\nu - z_n)|},$$

the author shows the existence of $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{C_n(z)}$ provided that the transfinite diameter of M is positive. Here z has an arbitrary position. *G. Szegő (St. Louis, Mo.).*

Leja, F.: Sur une famille de fonctions harmoniques dans le plan liées à une fonction donnée sur la frontière d'un domaine. *Bull. int. Acad. Polon. Sci. A* **1936**, 79—92.

Let D be an arbitrary region, $f(z)$ a real continuous function defined on the boundary F of D , λ an arbitrary real parameter. Using the notation

$$\omega(z) = (z - z_0)(z - z_1) \dots (z - z_n), \quad \omega_\nu(z) = \frac{\omega(z)}{\omega'(z_\nu)(z - z_\nu)}$$

the author considers the functions

$$\varphi_n(z) = \min \max_{(\nu)} \{ |\omega_\nu(z)| e^{\lambda n f(z_\nu)} \}$$

where the min refers to the z_ν describing F . Then $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\varphi_n(z)} = \varphi(z)$ exists for all values of z and $\lambda^{-1} \log \varphi(z)$ is harmonic exterior to $D + F$. Various inequalities for $\varphi(z)$ are derived. *G. Szegő (St. Louis, Mo.).*

Rado, Richard: Theorems about the maximum modulus of polynomials. *Proc. London Math. Soc.*, II. s. **41**, 221—242 (1936).

The author gives very remarkable generalizations of a theorem of Aumann (*Akad. Berlin* **1933**, 924; this *Zbl.* **8**, 253). Let $\{f_k(x)\}$ be a set of polynomials the degrees of which have the sum n , and $0 \leq \theta < 1$. To every continuum M with the diameter D there exists a circle C with the radius $\theta D/2n$ and its centre in M such that in C

$$|f_k(x)| \geq c_n(\theta) \max_{x \prec M} |f_k(x)|$$

holds for all k . Here $c_n(\theta)$ depends on n and θ . This is not valid for $\theta = 1$. The best value of $c_n(\theta)$ satisfies the inequalities

$$c'(1 - \theta)^2 \cdot 6^{-n} \leq c_n(\theta) \leq c''(1 - \theta) \cdot 2^{-n}.$$

In the special case when every $f_k(x)$ is linear, the best value of $c_n(0)$ is determined.

This is $c_n(0) = \frac{1 - \alpha_n}{1 + \alpha_n}$ where α_n denotes the positive root of

$$x^{\frac{1}{2}(n+1)} + x^{\frac{1}{2}n} = 1. \quad G. Szegő (St. Louis, Mo.).$$

Wegner, Udo: Zur Theorie der Interpolation. II. *Deutsche Math.* **1**, 352—358 (1936).

In the first part (*Deutsche Math.* **1**, 103; this *Zbl.* **13**, 158) the "error" of Lagrange's interpolation formula has been expressed by means of an integral containing a preassigned derivative of the given function. For this result a new proof is given by means of Euler's summation formula. In a special case a further proof is furnished and various remarks are made. *G. Szegő (St. Louis, Mo.).*

Krawtchouk, M., et S. Mowschitz: Sur la formule d'Hermite des quadratures mécaniques. *Bull. Sci. Univ. Kiev, Rec. math.* **1**, 171—177 u. franz. Zusammenfassung 177 (1935) [Ukrainisch].

[Cf. M. Krawtchouk, this *Zbl.* **12**, 294 (1936); also a recent paper by R. Bailey, *Duke M. J.*, **2**, 287—303 (1936), this *Zbl.* **14**, 312.] Consider a formula of mechanical

quadratures of Gauss' type

$$\int_{-a}^a \frac{p(x)}{\sqrt{a^2 - x^2}} f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n p_{k,n} f(\alpha_{k,n}) \quad (-a \leq \alpha_{k,n} \leq a; n = 1, 2, \dots) \quad (1)$$

with the property

$$\int_{-a}^a q(k) C_{2n-1}(x) dx = \sum_{k=1}^n p_{k,n} C_{2n-1}(\alpha_{k,n}), \quad (2)$$

$C_{2n-1}(x)$ — arbitrary polynomial of degree $\leq 2n-1$, $q(x) = \frac{p(x)}{\sqrt{a^2 - x^2}}$, $p(x) \geq 0$ is $(-a, a)$. The authors prove that $p(x) \equiv \text{const}$ is the only case (Hermite) where the coefficients $p_{k,n}$ are all equal, i. e. where we have (by virtue of (2)),

$$p_{k,n} = \frac{1}{n}, m_s = \int_{-a}^a q(x) x^s dx = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \alpha_{k,n}^s \quad (k=1, 2, \dots, n; 0 \leq s \leq 2n-1; n=1, 2, \dots). \quad (3)$$

The proof makes use of the substitution

$$x = a \cos \theta, \quad \alpha_{k,n} = a \cos \beta_{k,n}, \quad z = e^{i\theta}, \quad z_{k,n} = e^{i\beta_{k,n}}, \quad (4)$$

which transforms (3) into

$$\begin{aligned} (\mu_0 = 1), \quad \mu_j &= \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n z_{k,n}^j \quad (j = 1, 2, \dots, 2n-1) \\ \left(\mu_1 &= \frac{m_1}{a}, \mu_2 = \frac{2m_2}{a^2} - 1, \mu_3 = \frac{m_3}{a^3} - 3\frac{m_1}{a} \right). \end{aligned} \quad (5)$$

Assuming $\mu_1 = \mu_2 = 0$, we derive from (5) the fundamental result: if (3) holds for $n \leq N$, with $m_1 = 0$, $m_2 = \frac{a^2}{2}$, then the $z_{k,n}$, as given in (4), are roots of the equation $z^{2n} + a^{2n} = 0$, and $\int_0^\pi p(\cos \theta) \cos k\theta d\theta = 0$ ($k = 1, 2, \dots, 2N-1$). By letting $N \rightarrow \infty$, we get the desired result, namely: $p(x) \equiv \text{const}$ (almost everywhere in $(-1, 1)$). Note that the conditions $\mu_1 = \mu_2 = 0$ are no restriction at all, for they are always realized by means of a suitable linear transformation on x . *J. Shohat.*

Reihen:

Hardy, G. H., and J. E. Littlewood: Notes on the theory of series. XX.: On Lambert series. Proc. London Math. Soc., II. s. **41**, 257—270 (1936).

The authors have shown earlier (ibid. **19**, 21—29) that summability of $\sum_1^\infty a_n$ by the Lambert method (L) implies summability by the Abel-Poisson method (A) to the same sum. Now they consider the question: what conditions supplementing summability (A) will insure summability (L) to the same sum? A new proof of such a Tauberian theorem due to Ananda Rau (ibid. **19**, 1—20) is given, together with two new theorems; in all three cases the supplementary conditions are on $f(y) = \sum_1^\infty a_n e^{-ny}$, being for the new theorems respectively $f''(y) > -C/y^2$ and $f^{1+\delta}(y) = O(y^{-1-\delta})$ for some $\delta > 0$; that each of the three theorems is in a sense the best possible of its kind is indicated. Further it is shown that $f(y) = o(1/y)$ is not a sufficient supplementary condition; of this two proofs are given, the second by aid of the following relations here established for sufficiently large x ,

$$\left| \sum_{n < x} \frac{1}{n} \cos \frac{x}{n} \right| > C \log \log x, \quad \left| \sum_{n < x} \frac{1}{n} \sin \frac{x}{n} \right| > C (\log \log x)^{1/2}.$$

(XIX. see this Zbl. **13**, 161.)

C. R. Adams (Providence).

Garvin, Mary Cleophas: A generalized Lambert series. *Amer. J. Math.* **58**, 507 bis 513 (1936).

The author considers series of the form $\sum_1 a_n z^{\lambda n} / (1 - z^{\mu n})$ where λ and μ are any positive integers. This series reduces to the classical Lambert series when $\lambda = \mu = 1$, and it is shown that various properties of Lambert series such as conditions for divergence, convergence, uniform convergence, natural boundary, etc., can be extended to the more general series above. It should be observed that analogous results were obtained independently in an earlier thesis (unpublished) by C. H. W. Sedgewick, for more general class of series $\sum a_n F(z^n)$ where $F(z)$ is a given meromorphic function.

J. D. Tamarkin (Providence, R. I.).

Mandelbrojt, S., et Norbert Wiener: Sur les séries de Fourier lacunaires. Théorèmes directs. *C. R. Acad. Sci., Paris* **203**, 34—36 (1936).

Wiener, Norbert, et Szolem Mandelbrojt: Séries de Fourier lacunaires. Théorèmes inverses. *C. R. Acad. Sci., Paris* **203**, 233—234 (1936).

The authors are concerned with lacunary Fourier series

$$f(t) \sim \sum_{v=1}^{\infty} (a_{n_v} \cos n_v t + b_{n_v} \sin n_v t)$$

such that

$$\lim_{\log n_v} \frac{\log v}{\log n_v} = \sigma < 1.$$

Mandelbrojt has shown [this Zbl. **8**, 152, 169] that if either

$$\overline{\lim}_{\alpha \rightarrow 0} \left\{ -\frac{1}{\log \alpha} \log \left[-\log \int_{t_0}^{t_0 + \alpha} |f(t)| dt \right] \right\} = \delta, \quad \delta > \sigma(1 - \sigma)^{-1},$$

or $|f^{(n)}(t)| \leq K^n m_n$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) where

$$\frac{1}{\sigma} > \lim_{n \log n} \frac{\log m_n}{n \log n},$$

and $f^{(n)}(0) = 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$, then $f(t)$ is zero almost everywhere. The first note contains a proof of the first of these theorems based upon the ideas of Paley and Wiener [this Zbl. **11**, 16] and in the second note it is shown that the inequalities intervening in the theorems can not be improved upon by the construction of a simple example based upon the Fourier transform theory. *E. Hille.*

Durañona y Vedia, Agustín: Über eine Verallgemeinerung der Lejasehen Konvergenz der Doppelreihen. *Ann. Soc. Polon. math.* **13**, 106—116 (1935).

A "directional" convergence of the double series (1) $\sum_0^{\infty} a_{ij}$ has been defined by Leja (*Math. Ann.* **103**, 364—368); geometrically but roughly speaking, this generalizes "diagonal summation" by using a sequence of expanding similar triangles not necessarily isosceles to contain the partial sums. The present writer defines (1) as CL_{δ} -summable to s in the (fixed) direction α, β if $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} s_{\lambda} = s$, where

$$s_{\lambda} = \sum_{i,j} a_{ij} [1 - (\alpha i + \beta j) / \lambda]^{\delta} \quad \text{for } \alpha i + \beta j < \lambda, \quad (\delta \geq 0).$$

He expresses s_{λ} as a Stieltjes integral and by aid thereof shows: the strength of the method is non-decreasing and existent CL_{δ} -limits are unchanged as δ (> 0) increases; if (1) is convergent-bounded in Pringsheim's sense with sum s , it is CL_1 -summable to s in every direction; a Tauberian theorem for double power series. *C. R. Adams.*

Differentialgleichungen, Potentialtheorie:

Mitrinović, Dragoslav: Sull'integrazione dell'equazione differenziale del tipo di Abel. *Ist. Lombardo, Rend., II. s.* **69**, 203—208 (1936).

Es werden einige auf Quadraturen zurückführbare Spezialfälle der Differentialgleichung $y' = a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + a_3 y^3$ ($a_k = a_k(x)$) angegeben. *W. Feller.*

Orlov, M.: Quelques remarques sur l'équation différentielle de Tchébycheff. J. Inst. Math. Acad. Sci. Ukraine Nr 1, 63—71 u. franz. Zusammenfassung 71 (1936) [Ukrainisch].

L'équation $(1 - z^2) y'' - zy' + n^2 y = 0$ est étudiée pour des valeurs arbitraires (non nécessairement entières) de n ; expressions des solutions au moyen des intégrales complexes; construction des fonctions de Green. *W. Stepanoff* (Moskau).

Fayet, Joseph: Sur les équations différentielles linéaires et homogènes transformables en équations à coefficients constants par un changement de variable indépendante:

$\frac{dx}{dx} = u(x)$. Rev. mat. hisp.-amer., II. s. 11, 49—66 (1936).

L'auteur donne dans une forme nouvelle les conditions nécessaires et suffisantes pour la possibilité de la dite transformation. *Janczewski* (Leningrad).

Ascoli, Guido: Sopra una particolare equazione differenziale del secondo ordine. I. Ist. Lombardo, Rend., II. s. 69, 167—184 (1936).

Ascoli, Guido: Sopra una particolare equazione differenziale del secondo ordine. II. Ist. Lombardo, Rend., II. s. 69, 185—197 (1936).

Étude des intégrales de l'équation $\frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{\lambda^2 t}{2r} - \frac{r}{2} + \frac{1}{2r^2}$ (comp. ce Zbl. 13, 13).

Les courbes intégrales dans le plan (t, r) sont indéfiniment prolongeables pour $-\infty < t < +\infty$ et ne coupent pas l'axe $r = 0$; on suppose $r > 0$. Il existe une intégrale exceptionnelle $R(t)$ avec $R'' < 0$, son expression asymptotique pour $t \rightarrow +\infty$ est $R \sim \sqrt{t} \left(\lambda + \frac{A_2}{t^2} + \dots \right)$. Pour toute autre intégrale $r(t)$ la différence $R - r$ est oscillante pour $t \rightarrow +\infty$; l'expression asymptotique:

$$r = \lambda \sqrt{t} + C \sin \left(t + \frac{C^2}{12\lambda^2} \log t - \gamma \right) + O(t^{-\frac{1}{2}});$$

C, γ sont des constantes.

W. Stepanoff (Moskau).

Bréouss, K.: Quelques types d'équations différentielles qui se réduisent à l'équation de l'ordre hypergéométrique. J. Inst. Math. Acad. Sci. Ukraine Nr 1, 73—77 u. franz. Zusammenfassung 77 (1936) [Ukrainisch].

L'auteur considère les exemples de réduction des équations différentielles de types suffisamment généraux à une équation hypergéométrique. *Autoreferat*.

Perron, Oskar: Über die Entwickelbarkeit der Integrale von Differentialgleichungen nach Potenzen eines Parameters und der Anfangswerte. Math. Ann. 113, 292—303 (1936).

Für die Differentialgleichung (1) $\frac{dx}{dt} = \sum_{\nu, \mu} f_{\nu, \mu}(t) x^\nu \lambda^\mu$, $\nu + \mu \geq 1$ [die Reihe ist absolut konvergent für $|\lambda| \leq r$, $|x| \leq s$, $0 \leq t \leq a$; $|f_{\nu, \mu} x^\nu \lambda^\mu| < M$] hat Poincaré bewiesen, daß die Lösung $x(t)$, $x(0) = 0$, sich nach Potenzen von λ entwickeln läßt:

(*) $x = \sum_{\nu=1}^{\infty} \varphi_\nu(t) t^\nu$; $\varphi_\nu(0) = 0$. Nach der Transformation $\lambda \rightarrow r\lambda$, $x \rightarrow sx$, $t \rightarrow s/Mt$

nimmt die einfachste Majorante der rechten Seite von (1) die Form (A) $\frac{1}{(1-\lambda)(1-x)} - 1$

an; aber anstatt dieser Majorante und der etwas größeren (B) $\frac{1}{1-x-\lambda} - 1$ benutzt P. die noch gröbere Majorante (C) $\frac{(x+\lambda)(1+x+\lambda)}{1-x-\lambda}$. Für die Hilfsgleichung mit

der Majorante (C) erhält der Verf. den Wert für den Konvergenzradius von (*) im

Intervalle $0 \leq t \leq a$ gleich $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(2\nu)!}{4^\nu (\nu+1) (\nu!)^2} e^{-\nu a}$. Es wird weiter gezeigt, daß der

Beweis sich auch mittels der Majoranten (B) u. (A) durchführen läßt, und man er-

hält folgende günstigere Werte des Konvergenzradius: (B) $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\nu^{\nu-1}}{\nu!} e^{-\nu(a+1)}$

(A) $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\nu^{\nu-1}}{\nu!} (a+1)^{\nu-1} e^{-\nu(a+1)}$. Verallgemeinerung. Für das System

$$\frac{dx_k}{dt} = \sum_{\nu_0 \dots \nu_n} f_{k\nu_0 \nu_1 \dots \nu_n}(t) \lambda^{\nu_0} x_1^{\nu_1} \dots x_n^{\nu_n}, \quad \nu_0 + \nu_1 + \dots + \nu_n \geq 1, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

wobei für $0 \leq t \leq a$ $|f_{k\nu_0 \dots \nu_n}| \leq \frac{(\nu_0 + \dots + \nu_n)!}{\nu_0! \dots \nu_n!} \frac{Mr_k}{r_0^{\lambda_0} r_1^{\lambda_1} \dots r_n^{\lambda_n}}$

ist, mit den Anfangsbedingungen $x_k(0) = c_k$, läßt sich die Lösung in die Potenzreihen $x_k(t) = \sum_{\nu_0 \dots \nu_n} \varphi_{k\nu_0 \dots \nu_n}(t) \lambda^{\nu_0} c_1^{\nu_1} \dots c_n^{\nu_n}$ ($k = 1, 2, \dots, n$) entwickeln, und die Reihen sind

absolut konvergent im Bereiche $\frac{|\lambda|}{r_0} + \frac{|c_1|}{r_1} + \dots + \frac{|c_n|}{r_n} \leq \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\nu^{\nu-1}}{\nu!} e^{-\nu(Ma+1)}$.

W. Stepanoff (Moskau).

Krawtchouk, M., et K. Latychéva: Application du procédé des moments à la résolution des équations différentielles ayant des particularités dans les coefficients. J. Inst. Math. Acad. Sci. Ukraine Nr 1, 3—20 u. franz. Zusammenfassung 20—22 (1936) [Ukrainisch].

Latysheva, K.: The approximate resolution of linear differential equations with singularities in the coefficients by means of the method of moments. J. Inst. Math. Acad. Sci. Ukraine Nr 2, 91—121 u. engl. Zusammenfassung 121—124 (1936) [Ukrainisch].

Application de la méthode de Krawtchouk aux équations différentielles:
1) $L[y] \equiv (b-x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x)$, conditions aux limites

$$\alpha_i^{(0)}y(a) + \alpha_i^{(1)}y'(a) + \beta_i^{(0)}\left[\frac{1}{\log(b-x)}y(x)\right]_{x=b} + \beta_i^{(1)}[(b-x)y'(x)]_{x=b} = 0. \quad (i = 1, 2)$$

2) $L[y] \equiv (b-x)^2 y'' + (b-x)(x)y' + s(x)y = f(x)$, conditions aux limites

$$\alpha_i^0 y(a) + \alpha_i^{(1)} y'(a) + \beta_i^{(0)} [(b-x)^{-\beta_1} y(x)]_{x=b} + \beta_i^{(1)} [(b-x)^{1-\beta_1} y'(x)]_{x=b} = 0. \quad (i = 1, 2)$$

β_1 et β_2 sont les exposants au point $x=b$ et sont soumis à la condition $-\frac{1}{2} < \beta_1 < \beta_2 < \frac{1}{2}$.

L'opérateur $L[y]$ (resp. dans le 2^d article $L_1[y] = \frac{1}{(b-x)^2} e^{\int \frac{p(x)dx}{b-x}} L[y]$) est représenté

sous la forme: $L[y] \equiv M[y] + \lambda N[y]$, N étant d'ordre 1 ou 0, et l'équation $M[y] = 0$ admettant l'intégration explicite. Puis, comme dans les mémoires précédents de Krawtchouk dans le cas des équations sans singularités (voir p. ex. ce Zbl. 6, 55; 12, 165), on construit la fonction de Green $G(x, \xi)$ pour l'équation $M[y] = 0$ et pour les conditions aux limites données; en partant d'un système complet arbitraire

$\{\Phi_i(x)\}$, $i = 0, 1, 2, \dots$, on définit $\varphi_i = \int_a^b G(x, \xi) \Phi_i(\xi) d\xi$. La solution approchée

$y_m = \sum_{i=0}^m a_i^{(m)} \varphi_m(x)$ converge vers $y(x)$; les coefficients $a_i^{(m)}$ sont déterminés par les

équations: $\int_a^b L[y_m] M[\varphi_i] dx = \int_a^b f M[\varphi_i] dx$. Dans 2) extension à l'équation

$$(x-a)^2(b-x)^2 y'' + (x-a)(b-x)p(x)y' + q(x)y = 0.$$

W. Stepanoff (Moskau).

Krawtchouk, M.: Sur la convergence du procédé des moments dans le cas des équations aux dérivées partielles. J. Inst. Math. Acad. Sci. Ukraine Nr 1, 23—27 u. franz. Zusammenfassung 27—28 (1936) [Ukrainisch].

Remarques sur l'applicabilité du procédé de l'aut. (ce Zbl. 6, 55; 8, 13; 12, 165) à la représentation approchée de la solution d'une équation aux dérivées partielles d'ordre k aux caractéristiques imaginaires, avec des conditions aux limites assurant l'unicité.

W. Stepanoff (Moskau).

Saltykow, Nicolas: Note sur l'intégrabilité d'équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre. Publ. Math. Univ. Belgrade 4, 225—232 (1935).

The paper obtains by quadratures a general solution of the equation

$$afr + (ag + bf)s + bgt + (ah + cf)p + (bh + cg)q + chz + G = 0,$$

where a, b, c, f, g, h, G are constants, z is the unknown and p, q, r, s, t are its derivatives in Monge's notation. An application of the result to the equation of minimal surfaces is indicated.

J. M. Thomas (Durham).

Popovici, C.: Nouvelles intégrales des équations aux dérivées partielles par conditions aux limites. (Athènes, 2.—9. IX. 1934.) Actes Congr. Interbalkan. Math. 249—260 (1935).

Wie in früheren Arbeiten (vgl. z. B. dies. Zbl. 7, 165; 14, 63) beschäftigt sich Verf. mit Tatsachen der folgenden Art: Eine Differentialgleichung $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$ hat unendlich viele Integrale, die auf $y = x$ und $y = \alpha x$ vorgegebene Werte annehmen, wenn man auf die Stetigkeit bei $x = y = 0$ verzichtet; das folgt unmittelbar durch Zurückführung auf die Funktionalgleichung $\varphi(x) - \varphi(\alpha x) = G(x)$, indem zu der bekannten Reihe für deren Lösung unstetige Lösungen der homogenen Gleichung hinzugefügt werden bzw. jene Reihen durch passende konvergenzerzeugende Glieder modifiziert werden. Ähnliche Aussagen werden für allgemeine lineare partielle Differentialgleichungen 2. Ordn. und Randbedingungen auf verschiedenen sich schneidenden oder berührenden Kurven gemacht, indessen sind die Resultate und die Bedingungen, unter denen sie gelten, nicht durchweg hinreichend präzisiert.

Hellinger.

Sakurai, Tokio: The application of contour integral method to boundary value problems. Proc. Phys.-Math. Soc. Jap., III. s. 18, 233—256 (1936).

Die Differentialgleichung $\sum_{v=0}^n p_v(x) \frac{\partial^v u}{\partial x^v} + \sum_{\kappa=0}^m q_{\kappa}(y) \frac{\partial^{\kappa} u}{\partial y^{\kappa}} = 0$ mit Randbedingungen der Form $\sum_{\kappa=0}^{m-1} \left\{ \left(\alpha_{\kappa} \frac{\partial^{\kappa} u}{\partial y^{\kappa}} \right)_{y_1} + \left(\beta_{\kappa} \frac{\partial^{\kappa} u}{\partial y^{\kappa}} \right)_{y_2} \right\} = f(x)$ für das Rechteck $y_1 \leq y \leq y_2$,

$x_1 \leq x \leq x_2$ wird durch den bekannten Produktansatz $u = u_1(x) \cdot u_2(y)$ auf zwei gewöhnliche Differentialgleichungen zurückgeführt, die einen Parameter λ enthalten, und die Lösung durch ein Integral $\int u_1(x, \lambda) u_2(y, \lambda) d\lambda$ über eine in passender Weise ins Unendliche hinausgezogene Kurve der λ -Ebene gegeben, wobei für u_1, u_2 geeignet modifizierte Randbedingungen verwendet werden. Die Methode wird insbesondere für konstante Koeffizienten $p_v(x)$ dargestellt und auf verschiedene Arten von Randbedingungen angewendet. Durch passende Wahl des Integrationsweges wird der Anschluß an bekannte Lösungsformeln mit Reihenentwicklungen, Integraldarstellungen Fourierscher Art u. dgl. erhalten.

Hellinger (Frankfurt a. M.).

Collatz, L.: Über das Differenzenverfahren bei Anfangswertproblemen partieller Differentialgleichungen. Z. angew. Math. Mech. 16, 239—247 (1936).

Der Verf. erörtert zunächst das gewöhnliche Differenzenverfahren zur Aufsuchung von Näherungslösungen für Differentialgleichungen von der Form

$$L(f) = \sum_{\alpha+\beta \leq m} A_{\alpha, \beta}(xy) \frac{\partial^{\alpha+\beta} f}{\partial x^{\alpha} \partial y^{\beta}} = t(x, y),$$

wobei ein rechtwinkliges Gitter mit den Punkten

$$x = ih, \quad y = \kappa l \quad (i, \kappa = 0, \pm 1, \pm 2 \dots)$$

zugrundegelegt wird und bei dem die Differentialquotienten in üblicher Weise durch Differenzenquotienten ersetzt werden. Die zur eindeutigen Festlegung der Lösung nötigen Anfangsdaten denkt sich der Verf. längs der x -Achse vorgegeben. Er erweist die völlige Unbrauchbarkeit des Verfahrens an einem numerisch durchgerechneten Beispiel für die Gleichung des schwingenden Stabes. Es werden nun zwei neue Gesichtspunkte erörtert, die zur Aufstellung brauchbarer finiter Ausdrücke führen. —

A. Während man bisher bei der Angleichung des finiten Differenzenausdrucks an den Differentialausdruck bis auf Glieder möglichst hoher Ordnung eine Taylorsche Entwicklung, die von der Mitte des „Sternes“ ausging, benutzte, erweist es sich zweckmäßig, den Ausgangspunkt der Entwicklung möglichst weit vorn in der Richtung, in der das Verfahren fortschreitet, zu wählen. — B. Setzt man $f(ih, \kappa l) = f_{i, \kappa}$ und bezeichnet man die Näherungswerte von $f_{i, \kappa}$ mit $F_{i, \kappa}$, so definiert der Verf. als Index J eines finiten Ausdruckes

$$C_{i, k} F_{i, k} + \sum_{\kappa < k} C_{i, \kappa} F_{i, \kappa},$$

bei dem nach dem Gliede $F_{i, k}$ aufgelöst werden soll, den Ausdruck

$$J = \frac{1}{|C_{i, k}|} \sum_{\kappa < k} |C_{i, \kappa}|.$$

Um ein brauchbares Verfahren zu erzielen, kann man allenfalls durch Hinzufügen von neuen Gliedern den Wert des Index herabdrücken. Die Vorteile, die beim Einhalten der Gesichtspunkte A und B erzielt werden können, werden sowohl durch eine Fehlerabschätzung als auch durch ein numerisch durchgeführtes Beispiel erwiesen. Für einige Typen von Differentialgleichungen werden solche brauchbare finite Ausdrücke explizit angegeben. Funk (Prag).

Einaudi, Renato: *Sulle singularità isolate delle soluzioni della equazione delle onde.* Accad. naz. Lincei, Mem., VI. s. 6, 311—325 (1936).

Die zugelassenen Singularitäten in einem festen Punkte O werden zunächst dadurch eingeschränkt, daß von den Lösungen mit dieser Singularität in O folgende Eigenschaften verlangt werden: 1. gewisse Regularitätseigenschaften in jedem von O verschiedenen Punkt; 2. geeignetes Verschwinden im Unendlichen; 3. identisches Verschwinden außerhalb der Kugel vom Radius $r = t$ und dem Zentrum in O sowie, für $t \geq T$ (wobei $T > 0$ fest gegeben ist), identisches Verschwinden innerhalb einer Kugel vom Radius $t - T$ um O . Dann läßt sich jede Lösung mit den angegebenen Eigenschaften in die Form setzen

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{h=1}^{2n+1} \sum_{i=0}^n \lambda_{n,i} \frac{\psi_{n,h}^i(t-r)}{r^{n-i+1}} P_{n,h}(\theta, \varphi).$$

Dabei bedeuten die $P_{n,h}$ Kugelfunktionen, die $\psi_{n,h}(s)$ willkürliche Funktionen, die außerhalb des Intervalles $0 \leq s \leq T$ verschwinden, $(n+2)$ mal differenzierbar sind und mit ihren $(n+1)$ -ten Ableitungen für $s = 0$ und $s = T$ verschwinden. Rellich.

Spezielle Funktionen:

Shohat, J.: *The relation of the classical orthogonal polynomials to the polynomials of Appell.* Amer. J. Math. 58, 453—464 (1936).

The only set of orthogonal polynomials which is at the same time an “Appell set” is apart from a linear transformation the system of Hermite polynomials. For this fact a simple proof is given. In this connection the author derives some useful remarks concerning orthogonal polynomials in general, in particular concerning their characterization by means of the classical recurrence relations. G. Szegő.

Buell, C. Eugene: *The zeros of Jacobi and related polynomials.* Duke math. J. 2, 304—316 (1936).

The reviewer applied Sturm's method to the differential equation of the ultraspherical polynomials in order to obtain estimates for the zeros in the “principal case” $0 < \lambda < 1$ (Trans. Amer. Math. Soc. 39, 1; this Zbl. 14, 12). Comparison was made with the differential equations of the trigonometric and Bessel functions. The author gives an extension of these considerations for some values $\lambda < 0$ and $\lambda > 1$ and for some cases of general Jacobi polynomials. Furthermore Fejér's method (Mh. Math. Phys. 43, 193; this Zbl. 14, 13) based on Stieltjes's formula is used for the same purpose.

G. Szegő (St. Louis, Mo.).

Lagrange, René: Sur une inégalité de Hobson. C. R. Acad. Sci., Paris **202**, 1897 bis 1899 (1936).

The classical inequalities of Stieltjes for Legendre polynomials have been extended by Hobson [Proc. London Math. Soc., II. s. **32**, 239 (1930)] to generalized Legendre functions of the first and second kind. A new treatment of this problem is given here by using an integral representation of the functions in question due to Legendre-Hobson.

G. Szegő (St. Louis, Mo.).

Karas, K.: Tabellen für Besselsche Funktionen erster und zweiter Art mit den Parametern $\nu = \pm \frac{2}{3}, \pm \frac{1}{4}, \pm \frac{3}{4}$. Z. angew. Math. Mech. **16**, 248—252 (1936).

Values of $J_{\frac{2}{3}}(x)$ and $Y_{\frac{2}{3}}(x)$ have been tabulated by G. N. Watson in his Theory of Bessel Functions. In this paper tables are given of $J_{\nu}(x)$ and $Y_{\nu}(x)$ for other values of ν . For $\nu = \pm \frac{2}{3}$, values are given from 0 to 10 at intervals of 0,1, and for $\nu = \pm \frac{1}{4}, \pm \frac{3}{4}$, values are given from 0 to 8 at the same intervals. *W. N. Bailey*.

Integralgleichungen, Funktionalanalysis und Verwandtes:

Giraud, Georges: Sur une classe générale d'équations à intégrales principales. C. R. Acad. Sci., Paris **202**, 2124—2127 (1936).

Giraud, Georges: Complément à un résultat sur les équations à intégrales principales. C. R. Acad. Sci., Paris **203**, 292—294 (1936).

L'auteur étend les résultats de Michlin (ce Zbl. **14**, 66) aux équations intégrales contenant des intégrales principales d'un ordre ≥ 2 . La base de l'étude est l'opération

$$JU(X) = {}^m g U(X) + \int G(X; A) U(A) dV_A$$

g étant une constante; $U(X)$ une fonction remplissant une condition de Lipschitz et dont le produit par $L^h(0, X)$ est borné; $G(X, A) = F(x_1 - a_1, \dots, x_m - a_m)$ où $F(A(a_1 \dots a_m))$ est une fonction homogène remplissant une condition de Lipschitz

et telle qu'on a $\int F(A) dS = 0$. L'intégrale dans J est prise en valeur principale, $L(0, A) = 1$

en excluant le domaine infiniment petit $L(X, A) < \eta$. Faisant appel de ses résultats antérieurs (ce Zbl. **9**, 257; **11**, 216) l'auteur démontre qu'on a $J_1 J_2 U = J_2 J_1 U$. — Il étudie ensuite les séries (dans lesquelles P_n sont des polynomes harmoniques

$$F(A) = \lim_{\varrho \rightarrow 1} \sum_{n=1}^{\infty} \varrho^n P_n(A) L^{-m-n}(0, A), \quad (\varrho < 1)$$

$$TJ(A) = g + \lim_{\varrho \rightarrow 1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varrho^n i^n}{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)} \pi^{\frac{m}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) P_n(A) L^{-n}(0, A).$$

L'identité fondamentale $T(J_1 J_2) = T J_1 \times T J_2$ lui donne la possibilité de construire l'opération inverse à J . — Les applications aux équations intégrales suivent. — La seconde note est consacrée aux quelques calculs auxiliaires aidant à préciser les conditions d'existence de l'opération inverse à J . *Janczewski* (Leningrad).

Satô, Tunesô: A functional equation with the definite kernel. Mem. Coll. Sci. Kyoto A **19**, 1—9 (1936).

The paper is concerned with the determination of the function $\omega(x)$ which satisfies the conditions $\int_a^b (\omega(x))^2 dx = 1$, $\int_a^b \int_a^b K(x, y) \omega(x) \omega(y) dx dy = k$. He shows by

the usual methods that the maximum value of $|k|$ permissible is $1/|\lambda_1|$ where λ_1 is the smallest characteristic value of K , that for $k = 1/\lambda_1$ there exist two and only two solutions $\pm \varphi_1(x)$ if $\lambda_1^2 \neq \lambda_n^2$, $\lambda_n > 0$ for $n > 2$, and the kernel is complete. He asserts erroneously that the equations $\int \omega(x)^2 dx = 1$, $\int u(x)^2 dx = 1$, with $u(x) = \int K(x, t) \omega(t) dt$ have only two solutions. For the value $k = 1/\lambda_i$ there is a

unique solution if $K(x, y)$ is positive definite, and ω satisfies the condition $(\omega, \varphi_i) = 1$, viz. φ_i . Finally he determines values of ξ and η so that $\xi \varphi_{n-1} + \eta \varphi_n$ is a solution for $|k| < 1/|\lambda_1|$. *Hildebrandt* (Ann Arbor).

Satô, Tunezô: On the theory of polynomials of kernels. Mem. Coll. Sci. Kyoto A 19, 105—108 (1936).

The author proves the well known theorem that if $K(x, y)$ is a complete symmetric kernel, and $P(z) = \sum_{i=1}^n c_i z^i$ is such that $P(z) \geq 0$ for all $|z| \leq 1/|\lambda_1|$, where λ_1 is the smallest characteristic value of K , then $P(K) = \sum_{i=1}^n c_i K^{(i)}(x, y)$ is a positive kernel.

He also asserts that $P(K)$ is definite, which is linked with the obviously erroneous assertion that if λ_i is any characteristic value of K , then $P(1/\lambda_i) \neq 0$. *Hildebrandt*.

Satô, Tunezô: On Abel's integral equation. Mem. Coll. Sci. Kyoto A 18, 63—78 (1935).

Abel's integral equation $\int_0^x \varphi(s) ds / (x-s)^\alpha = f(x)$ is generalized in two ways:

(a) by the introduction of an n -fold integral:

$$\int_0^x \int_0^{s_1} \dots \int_0^{s_{n-1}} \frac{\varphi(s_n) ds_n \dots ds_1}{(x-s_1)^{\alpha_1} \dots (s_{n-1}-s_n)^{\alpha_n}} = f(x) \quad 0 < \alpha_i < 1$$

and (b) by the replacement of x by a function $\tau(x)$ in the denominator:

$$\int_0^x \frac{\varphi(s) ds}{(\tau(x) - \tau(s))^\alpha} = f(x).$$

The first of these is solved by a succession of obvious substitutions, giving a succession of Abel integral equations to which the results of Goursat [Acta math. 27, 131—133 (1903)] and of Rothe (this Zbl. 1, 65) are applied. The application of Dirichlet's formula in the original equation leads to the same final result. Multiplication of the second equation by $\tau'(x) dx / (\tau(x) - \tau(z))^{1-\alpha}$ and applications of the usual procedure yields results analogous to those of Abel's equation. *Hildebrandt* (Ann Arbor).

Izumi, Shin-ichi, and Tosio Kitagawa: On some integral equations. II. Sci. Rep. Tôhoku Univ., I. s. 25, 50—55 (1936).

A few theorems of the following type: If $f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x} dV(\alpha)$, where $\int_{-\infty}^{\infty} |\alpha^n dV(\alpha)| < \infty$, and

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{-\infty}^{\infty} f^{(k)}(x+t) d\varphi_k(t),$$

then $f(x) = \sum_k A_k e^{-u_k x}$, where the numbers u_k are real roots of the corresponding characteristic equation. (I. see this Zbl. 13, 168.) *Bochner* (Princeton).

Sternberg, W.: Anwendung der Integralgleichungen in der elektromagnetischen Lichttheorie. Compositio Math. 3, 254—275 (1936).

Verf. behandelt folgendes zweidimensionale Beugungsproblem: Gegeben ist im Vakuum eine einfallende elektromagnetische Welle, deren elektrischer Vektor \mathfrak{A} und magnetischer Vektor \mathfrak{B} von z unabhängig sind und eine zeitliche Periode $2\pi/n$, n reell, besitzen. Welches sind die Werte der elektrischen und magnetischen Feldstärke \mathfrak{E} und \mathfrak{H} , wenn ein Körper in der Form eines in Richtung der z -Achse unendlich ausgedehnten Zylinders, dessen Materialkonstante ε und Leitfähigkeit σ bekannt sind, ihr in den Weg gestellt wird? Aus den Maxwell'schen Gleichungen ergibt sich, daß es genügt, die Komponenten E_z und H_z zu bestimmen. Diese genügen der partiellen Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$, worin $k^2 = k_i^2 = (n^2 \varepsilon - i n \sigma) / c^2$ im Innern des Körpers und $k^2 = k_a^2 = n/c$ im Vakuum oder außerhalb des Körpers ist (c die Lichtgeschwindigkeit). Es wird angenommen, daß an der Grenze des Körpers E_z , $\partial E_z / \partial n$,

H_z , $(1/k^2) \partial H_z / \partial n$ stetig sind. Außerdem, daß die Sommerfeldsche Ausstrahlungsbedingung

$$\frac{\partial}{\partial r} [E_z - A_z] + i k_a [E_z - A_z] = O(1/r), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

und analog für $H_z - B_z$, besteht. Dann ergibt sich, daß E_z in der ganzen Ebene der Fredholmschen Integralgleichung

$$E_z(P) = (k_i^2 - k_a^2) \iint G(P, Q) E_z(Q) dQ + A_z(P) \quad (A)$$

genügen muß, worin $G(P, Q)$ die Greensche Funktion $H_0^{(2)}(k_a r_{PQ})/2\pi$, wo $H_0^{(2)}$ die Hankelsche Funktion nullter Ordnung und zweiter Art ist und die Integration über das Innere des Querschnitts des Körpers zu erstrecken ist. Für H_z besteht eine analoge

Gleichung, welche außerdem einen Term der Form $\int_C \frac{\partial G}{\partial n} H_z ds$ enthält, d. h. eine ge-

mischte Gleichung ist. Diese Gleichungen haben unter den angegebenen Bedingungen eindeutige Lösungen. Die Lösung des Eigenschwingungsproblems ist gleichwertig mit der Auffindung der Werte n , für welche 1 Eigenwert der zu (A) gehörigen homogenen Gleichung ist. Diese Werte sind Lösungen der durch Nullsetzung der Fredholmschen Determinante für $(k_i^2 - k_a^2) G(P, Q)$ erhaltenen Gleichung, wobei zu bemerken ist, daß nicht bloß k_i und k_a von n abhängen, sondern auch $G(P, Q)$. Aus physikalischen Gründen ergibt sich, daß die Lösungen dieser transzendenten Gleichung komplex sein müssen. Das Eigenschwingungsproblem für den Kreiszylinder wird als spezieller Fall behandelt.

Hildebrandt (Ann Arbor).

Natanson, I.: Über ein unendliches System von linearen Gleichungen. Bull. Soc. phys.-math. Kazan, III. s. 7, 97—98 u. deutsch. Zusammenfassung 98 (1936) [Russisch].

The author shows that an infinite system of linear equations

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^k x_n = 0, \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

possesses a solution

$$x_n = \frac{m^4}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-\frac{1}{\sin^2 x}} \cos mx dx, \quad \text{if } n = m^4, \quad (m = 1, 2, \dots);$$

$$x_n = 0, \quad \text{if } n \neq m^4. \quad I. S. Sokolnikoff \text{ (Madison, Wis.)}$$

Rado, R.: Linear transformations of sequences. Philos. Trans. Roy. Soc. London A 235, 367—414 (1936).

$(a_{\kappa\lambda})$ sei eine unendliche Matrix mit komplexen Koeffizienten. Es sei $\lim_{\kappa \rightarrow \infty} \sum_{\lambda=1}^{\infty} a_{\kappa\lambda} = 1$, $\sum_{\lambda=1}^{\infty} |a_{\kappa\lambda}| \leq N$ für alle κ . Die Gesamtheit dieser Matrizen sei \mathfrak{M}_N . \mathfrak{M} sei eine Menge von komplexen Zahlen, x_λ eine Folge aus \mathfrak{M} , $y_\kappa = \sum_{\lambda=1}^{\infty} a_{\kappa\lambda} x_\lambda$ die durch $(a_{\kappa\lambda})$ transformierte, $\mathfrak{S}(y_\kappa)$ die Menge der Häufungsstellen der Folge y_κ . Mit $(\mathfrak{M})_N$ werde die Vereinigungsmenge aller $\mathfrak{S}(y_\kappa)$ bezeichnet, wobei alle x_λ aus \mathfrak{M} und alle $(a_{\kappa\lambda})$ aus \mathfrak{M}_N zugelassen sind. Die Untersuchung dieser $(\mathfrak{M})_N$ hat Raff [Math. Z. 36, 1 (1932), dies. Zbl. 5, 62] begonnen. Verf. erhält abschließende Resultate: Ist \mathfrak{M} der Einheitskreis, so ist $(\mathfrak{M})_N$ der Kreis $|x| \leq N$. Allgemein ist $(\mathfrak{M})_N$ der Durchschnitt aller Kreise, die nach konzentrischer Verkleinerung im Verhältnis $1/N$ die Menge \mathfrak{M} enthalten. Ist \mathfrak{M} eine von einem Kreis verschiedene ebene Punktmenge, so gibt es eine Zahl $N^* \geq 1$, so daß die Gleichung $(\mathfrak{M})_N = \mathfrak{M}$ wenigstens eine Lösung \mathfrak{M} für $1 \leq N \leq N^*$ hat, für $N > N^*$ aber unlösbar ist. Ferner gilt das „Multiplikationstheorem“ $((\mathfrak{M})_{N_1})_{N_2} = (\mathfrak{M})_{N_1 N_2}$. Diese Resultate ergeben sich durch Untersuchung der Funktion $N_{\mathfrak{M}}(y)$; $N_{\mathfrak{M}}(y)$ ist das kleinste N , für das y in $(\mathfrak{M})_N$ liegt. $N_{\mathfrak{M}}(y)$ läßt sich auch definieren als untere Grenze von $|a_1| + \dots + |a_n|$, wobei a_1, \dots, a_n alle Systeme von komplexen Zahlen durchläuft, für die $a_1 + \dots + a_n = 1$ und $a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = y$ ist für geeignete x_i aus \mathfrak{M} . Es gilt ein Analogon zur Cauchyschen Integraldarstellung:

Ist y von \mathfrak{M} durch eine Jordankurve \mathfrak{K} getrennt, so ist $N_{\mathfrak{M}}(y) = \text{u. Gr. } \sum_{\nu=1}^n |a_{\nu}| N_{\mathfrak{M}}(y_{\nu})$, wobei die a_{ν}, y_{ν} den Bedingungen y_{ν} in \mathfrak{K} , $\sum a_{\nu} y_{\nu} = y$, $\sum a_{\nu} = 1$ genügen. $N_{\mathfrak{M}}(y)$ läßt sich auch anschaulich deuten. Im Falle des Einheitskreises \mathfrak{E} so: Jedem System x_{ν}, a_{ν} mit $|x_{\nu}| = 1$, $\sum a_{\nu} x_{\nu} = y$, $\sum a_{\nu} = 1$, $\sum |a_{\nu}| = N_{\mathfrak{E}}(y)$, entspricht durch die Transformation $a_{\nu} = b_{\nu} \frac{y}{x_{\nu}}$ ein System $b_{\nu} \geq 0$ mit $\sum b_{\nu} = 1$, $\sum b_{\nu} x_{\nu} = \frac{y}{|y|}$, der Spiegelpunkt von y an \mathfrak{E} ist also der Schwerpunkt der Randpunkte x_{ν} mit den Massen b_{ν} . Ist $|x - M| \leq r$ der kleinste Kreis k , in dem \mathfrak{M} enthalten ist, so ist $N_{\mathfrak{M}}(y) = \frac{|y - M|}{r} + O\left(\frac{1}{|y|}\right)$, $(\mathfrak{M})_N$ wird asymptotisch ein Kreis. Ist der Mittelpunkt von k nicht Begrenzungspunkt der konvexen Hülle des Durchschnittes von \mathfrak{M} und des Randes von k , so ist für genügend große $|y|$ $(\mathfrak{M})_N$ genau ein Kreis.

Köthe (Münster i. W.).

Pitt, H. R.: A note on bilinear forms. J. London Math. Soc. **11**, 174—180 (1936).

Die Bilinearform $A(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} x_i x_k$ heißt beschränkt im Raum $[p, q]$, $p > 0$, $q > 0$, wenn $\left| \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} x_i y_k \right| \leq C$ ist für alle $x = (x_1, x_2, \dots)$ mit $S_p(x) = (\sum |x_i|^p)^{1/p} \leq 1$, alle $y = (y_1, y_2, \dots)$ mit $S_q(y) = (\sum |y_k|^q)^{1/q} \leq 1$ und alle n . Die Beschränktheit von A ist notw. u. hinr. für die Konvergenz von $A(x, y)$ als Doppelreihe (oder für ihre spalten- oder ihre zeilenweise Konvergenz). Dies ist eine Verallgemeinerung des Satzes von E. Hellinger und O. Toeplitz [Math. Ann. **69**, 289 bis 330 (1910)] für $p = 2, q = 2$. Für $p \geq 1, q \geq 1$ ist dies übrigens schon von O. Toeplitz und dem Ref. [J. reine angew. Math. **171**, 193—226 (1934), § 8 Satz 3, § 10 Satz 4; dies. Zbl. **9**, 257] bewiesen worden. Darüber hinaus wird für $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} < 1$ gezeigt, daß $A(x, y)$ für alle x, y mit $S_p(x), S_q(y) \leq 1$ sogar gleichmäßig konvergiert [für $[\infty, \infty]$ bewies dies J. E. Littlewood, Quart. J. Math., Oxford Ser. **2**, 164 bis 174 (1930)].

G. Köthe (Münster i. W.).

Graves, L. M.: Corrections to my previous paper „topics in the functional calculus“. Bull. Amer. Math. Soc. **42**, 381—382 (1936).

The author calls attention to an erroneous quotation in the paper of the title (this Zbl. **13**, 25) from Chittenden [Trans. Amer. Math. Soc. **31**, 291 (1929)] that the H extension of his K relation on sets is additive, adding a correction. Also he requests the deletion of the bottom 7 lines from p. 642, and the top 3 on p. 643 of his paper which give an erroneous application of the H process to the space of continuous functions, limit defined as convergence at every point of $(0, 1)$. Hildebrandt.

Izumi, Shin-ichi, and Tosio Kitagawa: On the linear operations. Tôhoku Math. J. **42**, 54—64 (1936).

Let H be the Hilbert space of functions of integrable square in $(-\infty, \infty)$. A bounded linear operation of H into part of itself, if it is commutative with differentiation, is in the space of the Fourier-Plancherel transforms nothing else but multiplication with a bounded measurable function. This was shown by the reviewer [Math. Z. **29** (1928)]. — The authors show that this is also the case if the operation instead of being commutative with differentiation is supposed to be commutative with translations, thus establishing indirectly the identity of such operations. — Remarks on kernel representation of these and kindred operations in the form $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} t(t) d\varphi_n(t - x)$. Bockner (Princeton).

Bailey, R. P.: Convergence of sequences of positive linear functional operations. Duke math. J. **2**, 287—303 (1936).

The space G of functions considered is that of all bounded real valued functions

on an interval $a \leq t \leq b$, with norm the *LUB* of $|x(t)|$ for $a \leq t \leq b$. A linear (i.e. additive and continuous) operation $U(x)$ on G to real numbers is positive if $x \geq 0$ implies $U(x) \geq 0$. Fejér (this Zbl. 7, 310) has recently directed attention to these. Such an operation is monotonic and has $U(1)$ as its modulus on a linear set E if $x(t) \equiv 1$ belongs to E . For such operations the sequence of operations $U_n(x)$ will converge to an operation $U(x)$ on a linear set E of G , if $\lim_n U_n(x) = U(x)$ for every x of a set H dense in E , and E contains an element bounded from zero, i.e. the uniform boundedness of $U_n(x)$ is deducible from the last condition. For the special functional $U(x) = x(\tau)$ where τ is a point of (a, b) , it is shown that $\lim U_n(x) = U(x) = x(\tau)$ for a set dense in the subset C of continuous functions carries with it the convergence on the subset E_τ of functions of a linear subset E continuous at τ , if E contains C . For the operation $U(x) = \int x(t) d\alpha(t)$, $\alpha(t)$ absolutely continuous and monotonic, the set C is replaceable by the set of polynomials, and the sets E and E_τ by the set R of Riemann integrable functions. The form $\int x(t) d\alpha(t)$, $\alpha(t)$ absolutely continuous, characterizes the general absolutely continuous operations on R , i.e. those in which $U^I = U(x_I(t))$ where $x_I(t) = x(t)$ on I , and $= 0$ on CI , is for each x an absolutely continuous function. A functional transformation T on E of G to G , is positive if $x \geq 0$ implies $T(x) \geq 0$. For such linear transformations a result similar to the first of those on sequences of operations is valid. The last section of the paper proves that a formula of mechanical quadratures of Gauss type and of Tchebycheff type coincide only in a single case.

T. H. Hildebrandt (Ann Arbor).

Freudenthal, Hans: Eine Klasse von Ringen im Hilbertschen Raum. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 39, 738—741 (1936).

R sei ein separabler Euklidischer Raum und gleichzeitig ein kommutativer Ring mit folgenden Eigenschaften: $(a, b) =$ inneres Produkt von a und b ; $(ca, b) = (a, cb)$; zu jedem a gibt es eine reelle Zahl d_a , so daß für alle b gilt: $(ab, ab) \leq d_a(b, b)$; der Operator $H_a(x)$ mit a, x in R ist stetig in x . — Der Raum R wird dann metrisch in einen Hilbertschen Raum H eingebettet und die Operatoren $H_a(x)$ für a in R stetig auf ganz H fortgesetzt, d. h. eine „Multiplikation“ der Elemente aus H mit Elementen aus R eingeführt. — Die abgeschlossene Hülle von R in H wird dann mit Methoden charakterisiert, die den vom Autor in einer früheren Arbeit eingeführten analog sind [vgl. H. Freudenthal, Teilweise geordnete Moduln. Acad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 39, 641—651 (1936); vgl. nachst. Referat.]

Reinhold Baer.

Freudenthal, Hans: Teilweise geordnete Moduln. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 39, 641—651 (1936).

Es sei R eine Abelsche Gruppe mit den Zahlen eines geordneten Körpers K als Operatoren, und es sei in R eine teilweise Ordnung erklärt derart, daß obere und untere Grenze von endlich viel Elementen aus R existieren und die üblichen Verknüpfungen zwischen Addition, Multiplikation und Ordnung gelten. Dann sind die Distributivgesetze für obere und untere Grenze erfüllt. Ist insbesondere K der Körper aller reellen Zahlen, gibt es ein positives Element 1 in R , so daß die untere Grenze von 1 und einem positiven Element stets ein positives Element ist, existiert die obere (untere) Grenze aufsteigender (absteigender) oben (unten) beschränkter Folgen und ein vernünftiger Limesbegriff, so ist es möglich, die Elemente aus R als Lebesgue-Stieltjes-Integrale $\int \gamma de_\gamma$ darzustellen, wo e_γ eine monotone Funktion der reellen Variablen γ mit Werten in einer Booleschen Algebra $E \leq R$ ist. — Weiter werden die teilweise geordneten Moduln R charakterisiert, die sich als direkte Summen von solchen der Form V und W darstellen lassen; dabei ist W der lineare Raum aller in $0 \leq x \leq 1$ Lebesgue-quadratintegrablen Funktionen, wobei genau die „ ≥ 0 “ sind, die fast überall ≥ 0 sind, und V entsteht aus einem Euklidischen oder Hilbertschen Raum dadurch, daß man die Elemente für ≥ 0 erklärt, deren sämtliche Koordinaten in einem vollständigen Orthogonalkoordinatensystem ≥ 0 sind.

Reinhold Baer (Princeton, N. J.).

Dantzig, D. van: Ricci-calculus and functional analysis. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. **39**, 785—794 (1936).

This paper gives a resumé (without proofs) of the foundations of a Ricci calculus in a general space. Similar extensions have been given by Michal and Peterson (this Zbl. **2**, 193) and Kawaguchi (this Zbl. **13**, 119). The author obtains elegance by the introduction and interplay of both point and set functions. The space R is assumed to be a separable topological space. Functions of the first kind f_x are point functions. Functions of the second kind F^X are absolutely additive set functions on the Borel subsets of R . The characteristic function of a set E_x^X is a function of either kind according as X or x is fixed. The integral $\int F^{dx} f_x$ is the limit of Riemann sums $\sum_i F^{X_i} f_{x_i}$, x_i of X_i , as the maximum variation of f on X_i approaches zero. A linear operation or functional of the first kind $l[f]$ on functions of the first kind to real numbers determines a function of the second kind $L^X = l[E^X]$ and $l[f] = \int L^{dx} f_x$. Then linear transformations of the first kind are expressible in the form $g_x = \int P_x^{dy} f_y$; and composition of transformations leads to integral composition of corresponding P functions. A second topological space R' and linear transformations of functions on R to functions on R' leads to the function $E_x^{X'}$, assumed to have an inverse E_x^X in the sense $\int E_x^{dy'} E_y^X = E_x^X$ and $\int E_x^{dy} E_y^{X'} = E_x^{X'}$. If $f_{x'} = \int E_x^{dy} f_y$ and $F^{X'} = \int F^{dy} E_y^X$ then $\int F^{dx'} f_{x'} = \int F^{dx} f_x$, making available the notion of affinorials and tensorials. Set derivatives of functionals of the first kind are defined in the sense $\partial^X \varphi[f] = \frac{d}{d\varepsilon} \varphi[f + \varepsilon E^X] \Big|_{\varepsilon=0}$ and similarly point derivatives $\partial_x \Phi[F]$ of functionals of the second kind. In the first case if the differential $\delta \varphi = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{d}{d\varepsilon} \varphi(f + \varepsilon \delta f)$ then $\delta \varphi = \int \partial^{dx} \varphi \delta f_x$ but in the second case the corresponding result must be assumed. The notions are extensible to functionals of U where U has additional components, e.g. U_z^{XY} . The author asserts that the whole theory of linear connections, of parallel displacements, etc., can be extended to this general situation, exception being made of Riemann and conformal representations, which require special consideration. A twofold relation to ordinary differential geometry is indicated, by considering (a) R a finite set, functions of first and second kind being co- and contravariant vectors, or (b) R a differentiable manifold of n -dimensions.

Hildebrandt (Ann Arbor).

Michal, A. D., and D. H. Hyers: Second order differential equations with two point boundary conditions in general analysis. Amer. J. Math. **58**, 646—660 (1936).

Let the function $F(t, \xi, \eta)$ be defined for t on an interval $a \leq t \leq b$, and for ξ and η in a Banach space E , and let F have values in E . The authors obtain theorems on the existence and differentiability with respect to the end-values of solutions of the system $d^2 \xi / dt^2 = F(t, \xi, d\xi/dt)$, $\xi(t_0) = A$, $\xi(t_1) = B$, under appropriate restrictions. These theorems are applied to show the existence and properties of paths (geodesics in the case of Riemannian geometry) joining two given points not too widely separated, in an abstract differential geometry having a given affine connection. For the case when the space E is also a ring, a special affine connection is considered briefly.

Graves (Chicago).

● **Minetti, Silvio:** Sur quelques espaces fonctionnels et sur la géométrie de certains holoespaces en rapport avec la théorie des équations différentielles ordinaires. Mem. Sci. math. Fasc. **79**, 68 pag. Paris (1936).

Der Vitalische Kalkül gestattet bekanntlich zwei fruchtbare Anwendungen: einerseits die Untersuchung in der Geometrie höherer Stufen (vgl. z. B. Bortolotti, dies. Zbl. **3**, 322; **4**, 415; **9**, 273), [welche auch ohne diesen Kalkül unternommen werden kann (vgl. Bompiani, dies. Zbl. **11**, 418)], andererseits die bequeme Geometrisation der Funktionenlehre im Hilbertschen Raume. Der Verf. des vorgelegten Bandes erklärt die

elementaren Eigenschaften und Beziehungen (inkl. kovariante Ableitung) des Vitalischen Kalküls, um sie nachher auf die Funktionenräume (von unabzählbar vielen Dimensionen: holospaces) anzuwenden. Die Aufschriften der einzelnen Kapitel besagen am besten, inwiefern und in welcher Richtung dieses durchgeführt wird: I. Les fondements du calcul différentiel absolu généralisé de Pascal-Vitali. Les premières notions sur l'espace de Hilbert. II. La géométrie de l'espace (F) des fonctions holomorphes à l'intérieur d'un domaine (D) et continues dans ce domaine fermé. III. Métrique angulaire, lignes, lignes géodésiques, courbure géodésique, etc. de l'espace (F). IV. Symboles associés à un point-fonction de l'espace (H) ou (C) ou enfin de l'espace (D) des fonctions continues et dérivables dans l'intervalle $(0, 1)$. V. La dérivation covariante des systèmes absolus. Règles de dérivation covariante. Dérivés covariants de certains systèmes absolus. VI. Le concept d'équation non paramétrique d'une variété de l'holospace (D) et les liens entre la géométrie des holospaces et les équations différentielles ordinaires. VII. Généralités sur les variétés des holospaces (H), (C) ou (D). Les premiers éléments de la géométrie différentielle de ces holospaces. Variétés unidimensionnelles. VIII. Les équations différentielles pseudo-linéaires et transcendantes. Les conditions nécessaires et suffisantes pour la pseudolinéarité d'une équation différentielle ordinaire. Index bibliographique. — Zu einzelnen Kapiteln sei folgendes bemerkt: I: Die schon überall (auch im Vitalischen Kalkül) eingeführten Bezeichnungen „Vektor“, „Tensor“, „Dichte“ usw. sind hier (wahrscheinlich aus historischen Gründen) durch andere ersetzt worden. II: Hier wird auch der komplette Fréchet'sche Raum H_2 geometrisiert, indem einerseits der Begriff der Entfernung eingeführt wird, andererseits die von diesem Begriff unabhängigen (topologischen) Eigenschaften erwähnt werden. III: Wenn $f = P + iQ$ ein Element von (F) ist, so wird P im Intervall $(0, 2\pi)$, Q im Intervall $(2\pi, 4\pi)$ abgebildet. Die Kurve, welche f durchläuft, ist dann und nur dann eine geodätische, wenn $\partial^2 P / \partial s^2 = 0$, $\partial^2 Q / \partial s^2 = 0$, wobei s der Bogen der betrachteten Kurve ist. Im Kap. IV werden nur elementare Eigenschaften der „Christoffelschen“ Symbole der Art ν besprochen. (Eingehendere Untersuchungen findet der Leser in den beiden oben zitierten Arbeiten von Bortolotti und Bompiani.) Im Kap. VI wird angegeben, wie aus einer parametrischen Gleichung [z. B. aus der Gleichung einer Kurve: $x(t) = P(t|\lambda)$] der Parameter λ eliminiert wird. Man bekommt auf diese Weise eine Differentialgleichung in bezug auf $x(t)$, deren Ordnung die Dimensionszahl des vorgelegten Raumes angibt. Die Ausführungen des Kap. VII laufen einerseits bis zur Einführung der oskulierenden Räume eines n -dimensionalen Raumes ($n > 1$), andererseits zur Herleitung der Frenetschen Formeln für den Fall $n = 1$. (Die Frenetschen Formeln für $n > 1$ werden nicht hergeleitet.) VIII: Wenn eine Kurve in einen p -dimensionalen linearen Raum eingebettet werden kann, so heißt sie (zugleich mit ihrer nichtparametrischen Gleichung) pseudolinear. Dann ist die Lösung der eben erwähnten Gleichung der Kurve auch eine Lösung der nichtparametrischen Differentialgleichung des p -dimensionalen Raumes. Falls dies nicht zutrifft, wird die betreffende Kurve „transzendent“ genannt. Die Arbeit endet mit den n. u. h. Bedingungen für die Pseudolinéarité einer Kurve im Falle $p = 2$.

Hlavatý (Praha).

Variationsrechnung:

La Paz, Lincoln, and Tibor Radó: On a converse of Kneser's transversality theorem. Ann. of Math., II. s. 36, 749—769 (1935).

Let there be given: (1) a relation of transversality T which establishes a one-one correspondence between line elements and surface elements having the same base point; (2) a four-parameter family Φ of curves such that every two-parameter subfamily having a single transversal surface has a one-parameter family of such transversal surfaces. Then the curves of the family Φ are the extremals of a calculus of variations problem whose transversality relation is T . This theorem, stated for three-dimensional space, is proved by a method which obviously extends to n -dimensional

space. On account of a theorem of Vessiot [Bull. Soc. Math. France **34**, 230—269 (1906)] it suffices to show that there exists a one-parameter group of contact transformations whose path-curves constitute the family Φ while conjugate elements with respect to the group are transversal according to T . The required group of contact transformations is exhibited by means of a comparatively elementary geometrical construction, based on an appropriate notion of congruence. All functions, curves and surfaces that enter into consideration are supposed to be analytic. Reference is made to a preceding proof by Douglas [Trans. Amer. Math. Soc. **29**, 401—420 (1927)] and at greater length to another proof by Blaschke [Nieuw Arch. Wiskde, II. s. **15**, 202—204 (1928)]. Graves (Chicago).

Birkhoff, G. D., and M. R. Hestenes: Natural isoperimetric conditions in the calculus of variations. Duke math. J. **1**, 198—286 (1935).

In elaboration of the principle enunciated in an earlier paper (compare this Zbl. **11**, 167), the authors associate with the problem of minimizing the integral $\int_{x_1}^{x_2} f(x, y_i) dx$, $i = 1, \dots, n$, by a curve $y_i = y_i(x)$ of class D' which joins the points $P_1(x_1, y_{i1})$ and $P_2(x_2, y_{i2})$ the set of conditions $J_1(\xi_\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} f_\alpha dx = 0$, where $f_\alpha = \xi_{i\alpha} f_{y_i} + \xi'_{i\alpha} f_{y'_i}$, $\alpha = 1, \dots, m$, and $\xi_{i\alpha}$ are sets of functions of class C^3 on the interval $x_1 x_2$ and vanishing at its endpoints. These conditions, called natural isoperimetric conditions, are satisfied by every extremal arc for the problem. The set of conditions is called a minimal set for an admissible arc satisfying them provided that arc furnishes at least a weak minimum for the given integral, subject to the isoperimetric conditions $J_1(\xi_\alpha) = 0$, and provided no proper subset has this property. The existence of such minimal sets for an extremal arc $P_1 P_2$ is demonstrated and the number m is shown to be equal to the sum of the orders of the points conjugate to P_1 on $P_1 P_2$, provided P_2 is not conjugate to P_1 and the arc $P_1 P_2$ satisfies the strengthened Legendre condition; if this arc satisfies moreover the "strengthened condition of Weierstrass" (relating to the function $F = f + \lambda_\alpha f_\alpha$), it can even be affirmed that it furnishes a strong minimum for the problem arising through the adjunction of the natural isoperimetric conditions. Similar conclusions are obtained for the problem with one variable endpoint, the number m now being equal to the sum of the orders of the points conjugate to P_1 and the order of concavity of the extremal (as defined pp. 215 and 259). For the problem in parametric form with variable endpoints analogous results are obtained. It is also shown that if $P_1 P_2$ is an extremal arc which satisfies the strengthened conditions of Legendre and Weierstrass, and $P_3 P_4$ a sub-arc free from points conjugate to P_3 , then there exists a neighborhood of $P_1 P_2$ such that $P_3 P_4$ furnishes a minimum for the integral under consideration in the class of admissible arcs which join its endpoints and which lie in this neighborhood. For the double integral $\iint f(x, y, z, p, q) dx dy$ a set of natural isoperimetric conditions is set up and it is shown that under proper restrictions an extremal surface which satisfies these conditions also satisfies the conditions of Legendre and Weierstrass. Dresden.

Graves, Lawrence M.: The existence of an extremum in problems of Mayer. Trans. Amer. Math. Soc. **39**, 456—471 (1936).

The paper is concerned with the following problem. Given a system of functions $h_\sigma(x, y, y', z)$, $\sigma = 1, \dots, s$, and a function $g[a, b, \eta, Y, \zeta, Z]$, where the arguments are multipartite symbols in the usual sense. Choose a curve $C: y_i = y_i(x)$, $a \leq x \leq b$, $i = 1, \dots, n$ and choose also values ζ_1, \dots, ζ_s . Let $z_1(x), \dots, z_s(x)$ be the solution of the system $z'_\sigma = h_\sigma(x, y, y', z)$ with the initial conditions $z_\sigma(a) = \zeta_\sigma$. Then $g[a, b, y(a), y(b), \zeta, z(b)]$ is a quantity depending upon C and ζ_1, \dots, ζ_s , and it will be denoted by $J(C, \zeta)$. The problem is to minimize $J(C, \zeta)$. The paper contains existence theorems for this problem and for related problems, under suitable restrictions on the functions h_σ and g ,

and for properly defined admissible curves. As compared with previous work (see reviews of papers by Gillespie, Graves, Marnià in this Zbl. 5, 298; 6, 258; 8, 71 and 360; 10, 119) the progress consists first in including functions more general than heretofore considered, and second in replacing Lipschitz conditions by the requirement of absolute continuity. In establishing the existence theorems, the direct method is followed, and accordingly lower semi-continuity plays an important part.

Tibor Radó (Columbus).

Cinquini, Silvio: *Sopra una condizione sufficiente per la semicontinuità degli integrali dei problemi variazionali di ordine n .* Ann. Mat. pura appl., IV. s. 15, 77—86 (1936).

Let A be a region of the space of points $(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$, and let the function $f(x, y, y', \dots, y^{(n)})$ together with its partial derivatives $f_{y^{(n)}}$, $f_{y^{(n)}x}$, $f_{y^{(n)}y}$, $f_{y^{(n)}y'}$, ..., $f_{y^{(n)}y^{(n-2)}}$, be defined and continuous and satisfy the condition $f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}, Y^{(n)}) - f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}, y^{(n)}) - (Y^{(n)} - y^{(n)}) f_{y^{(n)}}(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}, y^{(n)}) \geq 0$ for all $(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ in A and all $y^{(n)}, Y^{(n)}$. Let K denote the class of curves $C: y = y(x)$ ($a \leq x \leq b$), with the properties: (1) the functions $y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)$ are absolutely continuous; (2) the elements $(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x))$ are all interior to A ; (3) the integral $I(C) = \int_a^b f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) dx$ exists. Then the

integral $I(C)$ is lower semi-continuous on the class K , in terms of neighborhoods of order $n - 1$.

Graves (Chicago).

Menger, Karl: *Courbes minimisantes non rectifiables et champs généraux de courbes admissibles dans le calcul des variations.* C. R. Acad. Sci., Paris 202, 1648—1650 (1936).

L'A. considère certains théorèmes d'existence du calcul des variations pour les courbes représentées sous la forme paramétrique, dans lesquels il est possible ou même nécessaire l'admission des courbes non rectifiables, et il observe que ces théorèmes peuvent être généralisés pour des espaces distanciés généraux et des fonctions discontinues et irrégulières.

Basilio Manià (Pisa).

Frink jr., Orrin: *Geodesic continua in abstract metric space.* Amer. J. Math. 58, 514 bis 520 (1936).

The author considers the problem of geodesic continua instead of the problem of geodesic arcs, in order to avoid difficulties arising from the fact that the limit set of a sequence of arcs is not an arc in general. A geodesic continuum is defined as a continuum whose linear measure in the sense of Carathéodory is a minimum under a given set of side conditions. The author establishes various existence theorems following the general pattern of the direct method in Calculus of Variations. His principal tool is the following theorem: In a metric space, whose elements are continua of some other metric space, the Carathéodory linear measure is lower semi-continuous.

Tibor Radó (Columbus).

Morse, Marston, and George B. van Schaack: *Critical point theory under general boundary conditions.* Duke math. J. 2, 220—242 (1936).

In a previous paper (Trans. Amer. Math. Soc. 33, 72—91; this Zbl. 1, 331), M. Morse had considered the critical points of a function of class C_2 . The authors now generalize his results to functions $f(x_1, \dots, x_n)$ of class C_1L , i.e. functions with continuous first derivatives which satisfy Lipschitz conditions; the critical values of f have to be isolated. In part I the authors define for every critical set σ of f type numbers m_0, \dots, m_n , which are always finite and only depend on the definition of f in an arbitrarily small neighbourhood of σ . — In part II f is assumed to be of class C_1L in some region Σ (which satisfies certain regularity conditions) and to be of class C_2 in a neighbourhood of the boundary B of Σ , having only a finite number of critical values in Σ . Moreover the outer normal derivative of f on B is to be positive. If then M_i and R_i

are respectively the sum of the i -th type numbers of the critical sets of f in Σ and the i -th Betti number of Σ , the relations

$$\sum_{\mu=0}^i (-1)^{i-k} (R_k - M_k) \begin{cases} \leq 0 & \text{for } i = 0, \dots, n-1 \\ = 0 & \text{for } i = n \end{cases}$$

hold. — In part III the boundary conditions for f are modified: f shall be of class C_3 in a neighbourhood of B ; the boundary function f_0 of f may become stationary, but must have a finite number of critical values. Then the above relations still hold, if now M_i denotes the sum of the i -th type numbers of the critical sets of f on Σ and of f_0 on the negative boundary of Σ . Fritz John (Lexington).

Morse, Marston: Functional topology and abstract variational theory. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. **22**, 313—319 (1936).

Der Verf. gibt einen Abriss einer Theorie der kritischen Punktmengen einer halbstetigen Funktion F in einem metrischen Raume, in Fortsetzung früherer Untersuchungen für andere Klassen von Funktionen (s. Morse, Calculus of variations in the large, dies. Zbl. **7**, 212, und Morse und van Schaak, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **21**, 258—262; dies. Zbl. **10**, 28). Unendlichkeitsstellen von F werden zugelassen. Die zugrunde liegende Gruppentheorie wird unabhängig entwickelt. Die vom Verf. aufgestellten Relationen zwischen den Anzahlen kritischer Punkte einer Funktion und den Zusammenhangszahlen des Raumes nehmen hier die symbolische Form an:

$$m_n \bmod^* m_{n-1} \bmod^* \dots \bmod^* m_0 \geq 0, \quad (n = 0, 1, \dots)$$

wobei die m_n Gruppen gewisser Zykeln auf M bezeichnen, ≥ 0 für „existiert“ steht und „ $\bmod^* A$ “ bedeutet: modulo einer (in einem näher definierten Sinne) zu A isomorphen Gruppe. Mit Hilfe des Vorangehenden werden „topologische“ Extremalen in einem metrischen Raume definiert, die zugleich Extremalen im gewöhnlichen (metrischen) Sinne bilden. Eine vollständigere Darstellung ist angekündigt. F. John.

Funktionentheorie:

Kobori, Akira: Eine Klasse von Potenzreihen. Jap. J. Math. **13**, 49—60 (1936).

Es handelt sich um die Klasse S_k der für $|z| < 1$ regulären $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$, die dort der Bedingung $\Re \frac{zf'(z)}{f(z)} > -k$, $k \geq 0$, genügen. Die Klasse S_0 ist also die Klasse der bezüglich des Nullpunktes sternförmigen $f(z)$. In Verallgemeinerung der für diese letzteren bekannten Methoden und Ergebnisse wird bewiesen: 1. $\left(\frac{f(z)}{z}\right)^{\frac{1}{k+1}}$ besitzt $\frac{1}{(1-z)^2}$ als (funktionentheoretische) Majorante. 2. $f(z)$ ist für $|z| < \frac{1}{2k+1}$ bezüglich des Nullpunktes sternförmig. 3. $f(z)$ ist für $|z| < \frac{3+2k-\sqrt{(5k+3)(2k+1)}}{(2k+1)^2}$ konvex. 4. $|a_n| \leq \frac{(2k+2)(2k+3)\dots(2k+n)}{(n-1)!}$. 5. Alle Abschnitte von $f(z)$ sind für $|z| < \frac{1}{4(k+1)}$ bezüglich des Nullpunktes sternförmig. Alle diese Bestimmungen sind scharf. Rogosinski (Königsberg).

Mitropolsky, W.: Sur les propriétés arithmétiques des valeurs des fonctions entières. Compositio Math. **3**, 190—198 (1936).

Gelfond extended a theorem of Pólya concerning integral functions assuming integer values for $x = 0, 1, 2, \dots$ (this Zbl. **7**, 121). In the present paper another result of Pólya [Rend. Circ. mat. Palermo **40**, 1 (1915)] is generalized in a similar direction as in Guelfond's investigation. The author shows: Let $g(x)$ be an integral function assuming with its $p-1$ first derivatives integer values for $x = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. If $g(x)$ is of the order 1 and of the type $\alpha < 2p \log \left\{ \frac{1}{2} e^{1/p-1} + \sqrt{\frac{1}{4} e^{2/p-2} + 1} \right\}$, it is a polynomial. G. Szegö (St. Louis, Mo.).

Schoenberg, I. J.: On the zeros of successive derivatives of integral functions. Trans. Amer. Math. Soc. **40**, 12—23 (1936).

Démonstration d'un théorème précisant certains résultats de W. Gontcharoff et S. Takenaka (ce Zbl. **13**, 26). — Pour obtenir la valeur asymptotique des polynômes

$$P_n(x) = \int_1^x dx' \int_{-1}^{x'} dx'' \dots \int_{(-1)^{n-1}}^{x^{(n-1)}} dx^{(n)},$$

l'auteur s'appuie sur quelques propriétés des polynômes d'Appell. *W. Gontcharoff.*

Malin, Henry: On entire functions with gaps. J. Math. Physics, Massachusetts Inst. Technol. **15**, 90—96 (1936).

En employant des méthodes de M. Wiener, l'auteur donne des démonstrations de quelques théorèmes lacunaires portant sur des fonctions entières, et qui ont été démontrés avec d'autres méthodes, par M. Pólya et M.M. Mandelbrojt et Gergen.

Mandelbrojt (Clermont-Ferrand).

Bergmann, Stefan: Sur les fonctions entières et méromorphes de deux variables complexes. I. Compositio Math. **3**, 136—173 (1936).

Stellt $\varphi(w, z) = 0$ die Nullstellenfläche \mathfrak{N} einer in einem vorgegebenen Bereiche \mathfrak{B} gegebenen meromorphen Funktion dar, so heißt $\varphi(w, z)$ eine Nullstellenfunktion (entsprechend Polfunktion), wenn $\frac{f}{\varphi}$ auf \mathfrak{N} (mit etwaiger Ausnahme in isolierten Punkten) regulär ist. — Verf. gibt im 1. Teil der Arbeit unter Heranziehung einer unendlichen Folge von dem gegebenen Bereich \mathfrak{B} von innen approximierenden Bereichen \mathfrak{B}_m notwendige und ebenso hinreichende Bedingungen für die Existenz einer in \mathfrak{B} quadratintegrierbaren, regulären Funktion $f(w, z)$ an, die eine vorgegebene (unendliche) Folge von Nullstellenfunktionen genau als ihre Nullstellenfunktionen aufweist. Im

Sonderfalle, daß \mathfrak{B} der offene Raum ist, kann sodann Verf. für das Produkt $\prod_{s=1}^{\infty} n_s e^{-b_s}$

mit n_s als Nullstellenfunktionen und b_s als geeigneten Polynomen eine hinreichende Konvergenzbedingung angeben. — Im 2. Teil der Arbeit werden umgekehrt zu gegebenen meromorphen Funktionen die Nullstellenfunktionen und Nullstellenmangfaltigkeiten untersucht. Als Bereich \mathfrak{B} wird jetzt allerdings nur noch der offene Raum zugelassen, der durch eine kontinuierliche Folge von Dizylindern approximiert wird. Auf diese Weise gelingt es Verf., seine Untersuchungen an bekannte Forschungen aus der klassischen Funktionentheorie (z. B. solche von Hadamard, Lindelöf und Nevanlinna) anzuschließen.

Behnke (Münster i. W.).

Biernacki, Mięcisław: Sur les fonctions multivalentes d'ordre p . C. R. Acad. Sci., Paris **203**, 449—451 (1936).

On suppose que $f(z) = a_1 z + \dots + a_n z^n + \dots$ est une fonction holomorphe et p -valente dans $|z| < 1$. En employant une inégalité de M^{lle} Cartwright et une égalité de M. Mandelbrojt, l'A. démontre que: $|a_n| < \mu_q B(p) n^{2p-1}$, où, q étant le nombre des zéros de $f(z)$ dans $|z| < 1$, $\mu_q = \text{Max}(|a_1|, |a_2|, \dots, |a_q|)$, $B(p)$ ne dépend que de p . Le nombre $2p - 1$ ne peut pas être remplacé par un nombre plus petit.

Mandelbrojt (Clermont-Ferrand).

Lavrentieff, M.: Sur une classe de représentations continues. Rec. math. Moscou **42**, 407—423 (1935).

The author presents proofs of results announced in a preceding paper (this Zbl. **12**, 215). Two corrections in the latter review should be noted. In the definition of an almost analytic function lines 8—10 should read as follows: There exist two real functions $p(z) \geq 1$ and $\theta(z)$ of the variable z such that, except for a set E formed by a finite number of analytic arcs, $p(z)$ is continuous in D , $\theta(z)$ is continuous in every point of D for which $p(z) > 1$. The function $p(z)$ is uniformly continuous in every closed region Δ whose boundary is a simple analytic curve and which contains no points of E ; for the same Δ if Δ contains no points where $p(z) = 1$, $\theta(z)$ is uniformly

continuous in Δ . In line 22 the integral (*) should read $\int_0^1 \frac{dr}{rq(r)}$. The analytic results

developed enable the author to give a proof of the existence theorem for the conformal representation of a two-dimensional Riemannian manifold on a region of the plane.

W. Seidel (Rochester, N.Y.).

Mitrinovitch, Dragoslav: Un problème sur les fonctions analytiques. Rev. math. Union Interbalkan. 1, 53—57 (1936).

Es wird die Frage gestellt: Wann wird eine reelle Gleichung (*) $F(P, Q, x, y) = 0$ durch den Real- und Imaginärteil P und Q einer analytischen Funktion $f(x + iy)$ befriedigt? Notwendig und hinreichend dafür soll sein, daß (*) und zwei durch Elimination mit den Cauchy-Riemannschen Gleichungen erhaltenen Differentialbeziehungen durch reelle P und Q gleichzeitig befriedigt werden können.

W. Feller.

Wahrscheinlichkeitsrechnung, Statistik, Versicherungsmathematik:

Lagneau, Jean: Sur les valeurs moyennes relatives. Mathesis 50, 191—196 (1936).

Zusammenstellung der elementarsten Relationen für den Mittelwert in bezug auf bedingte Wahrscheinlichkeiten bei endlichwertigen stochastischen Veränderlichen.

W. Feller (Stockholm).

Vajda, Stefan: Über Wahrscheinlichkeiten geordneter Ereignisse. Mh. Math. Phys. 44, 186—202 (1936).

Gegenstand der Untersuchung sind lineare Beziehungen, die zwischen den Wahrscheinlichkeiten dafür bestehen, daß m Ereignisse in einer bestimmten vorgegebenen Reihenfolge auftreten. Außerdem wird eine Darstellung solcher Wahrscheinlichkeiten als Linearkombination von anderen mit geringerer „Rangzahl“ gegeben. Eine Wiedergabe der Definitionen und Sätze wäre für ein kurzes Referat zu platzraubend.

Feller.

Tricomi, F.: Sulla media dei valori assoluti di errori seguenti la legge di Gauss. Giorn. Ist. Ital. Attuari 7, 280—290 (1936).

Es handelt sich um eine Näherungsformel für das Verteilungsgesetz des im Titel erwähnten Mittelwerts. Die Wahrscheinlichkeitsdichte wird in der Form $Ae^{-c^2 y^2} y^{\nu-1}$ gesucht, deren Wahl nur durch wenig zwingende Analogien begründet ist. Für die drei Parameter A, c, ν erhält Verf. überraschend einfache Näherungsausdrücke, indem er die Momente 0-ter, 1-ter und 2-ter Ordnung der gesuchten Verteilung den entsprechenden (bekannten) wirklichen Zahlen gleichsetzt.

A. Khintchine (Moskau).

Friedli, W.: Über eine einfache Momentenbeziehung beim Gauss'schen Fehlergesetz. Mitt. Vereinig. schweiz. Versich.-Math. H. 31, 131—139 (1936).

If the n -th absolute moment of a frequency function be denoted by M_n , it is shown that

$$\frac{n M_n (n+1) M_{n+2}}{(n+1) M_{n+1} (n+3) M_{n+3}} = \frac{n(n+2)}{(n+1)(n+3)} \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

if the frequency function be Gaussian. A like property is shown for four relatively unimportant frequency functions.

C. C. Craig (Ann Arbor, Mich.).

Kullback, Solomon: On certain distribution theorems of statistics. Bull. Amer. Math. Soc. 42, 407—410 (1936).

Der Verf. bemerkt, daß gewisse, in der statistischen Literatur oft gemachte Glättungsannahmen (absolute Stetigkeit usw.) bei der Bestimmung der Verteilungsfunktionen von Funktionen zufälliger Variablen mit Rücksicht auf die Untersuchungen von Haviland (dies. Zbl. 10, 172; 12, 63; 13, 59, 60) in Wirklichkeit überflüssig sind.

Wintner.

Romanovsky, V.: Note on the method of moments. Biometrika 28, 188—190 (1936).

This note refers to a paper of Merzrath (see this Zbl. 7, 356) in which he shows that conditions he sets up that a function be a good approximation to a given frequency function over a finite range imply the equality of the first n moments of the two functions over the same range. The author proves the converse to be true. With some alterations, he also similarly reverses Merzrath's like result for distribution functions over an infinite range.

C. C. Craig (Ann Arbor, Mich.).

Gumbel, E. J.: Les inondations et la théorie de la plus grande valeur. C. R. Acad. Sci., Paris **203**, 27—29 (1936).

Using the fact that overflows of rivers correspond to maximal rates of flow, and that these rates have been shown to be distributed statistically according to a logarithmic transformation of the Gaussian law, the author uses the quartile values of the distribution (see this Zbl. **11**, 361) to determine the two parameters, rather than interpolation or the method of moments. Applications to records for 118 years for the Rhine are shown to justify the assumptions. *Albert A. Bennett* (Providence).

Kärsna, Alfred: Vereinfachte Methoden zur Berechnung des Korrelationskoeffizienten bei normaler Korrelation. Acta et Comment. Univ. Tartu A **29**, Nr 2, 1—16 (1936).

The author discusses the technique in computing the correlation coefficient for a normal bi-variate distribution. He provides nomograms for the purpose and explains their use, concluding that this method is simpler and quicker than a purely analytic method using formulas, or methods involving special tables. *Bennett*.

Neymann, J., and E. S. Pearson: Contributions to the theory of testing statistical hypothesis. I. Unbiased critical regions of type A and type A_1 . Statist. Res. Mem., Univ. London **1**, 1—37 (1936).

The authors briefly review ideas and results contained in their former papers on this subject [see Philos. Trans. Roy. Soc. A **231**, 289—337 (1933); also this Zbl. **6**, 268 and **8**, 24] and then in this paper make a beginning of the study of the situation that arises when no “uniformly most powerful” test exists. It is first suggested that a criterion to be applied to a test is that it shall be unbiased, i.e., that it makes the probability of rejecting an hypothesis a minimum when the hypothesis is true. A definition of uniformly most powerful unbiased tests is given but the mathematical investigation of such tests is deferred. The problem is here approached in a simpler manner which does in examples given provide such tests. Dealing with frequency laws of one parameter in the present paper, the authors define tests and the associated critical regions of type A which are unbiased but which also have the property that the second derivative of the power function (which expresses the probability that a sample point fall in the critical region) is a maximum when the hypothesis is true. A method of determining such regions is developed, the regularity conditions demanded of the frequency function being discussed in some detail. If the regularity conditions are satisfied, and if a sufficient statistic T of the parameter exists, it is shown that critical regions of type A are bounded by surfaces on which T has constant values. Special examples of the method are worked out. The invariance of such regions with respect to transformations of the parameter is shown to exist under certain conditions. Finally unbiased critical regions of type A_1 are defined; these minimize the power function for every admissible value of the parameter. Two regions previously found to be of type A , are also of type A_1 . *C. C. Craig* (Ann Arbor, Mich.).

Johnson, Palmer O., and J. Neyman: Tests of certain linear hypotheses and their application to some educational problems. Statist. Res. Mem., Univ. London **1**, 57 bis 93 (1936).

This extensive paper studies applied problems of education and psychology dealing with matched groups in the light of the statistical methods developed in a series of articles by J. Neyman and E. S. Pearson (see this Zbl. **4**, 157; **5**, 212; **8**, 24) and of which an application was made by S. Kołodziejczyk (see this Zbl. **11**, 220). The present exposition deals with the same field as that for which R. A. Fisher devised the methods of analysis of variance and covariance as found in his volume: Statistical Methods for Research Workers, but claims to offer the advantage of a single principle available for all cases, that of testing among a class of admissible linear hypotheses by the use of the likelihood ratio. A concept is introduced into the general problem, of “region of significance”, within which a given hypothesis falls below the arbitrarily selected level of significance such as 5% or 1%. An application

is made to original data on the problem of sex difference in learning ability. A brief supplementary table of the incomplete Beta function is appended. *Albert A. Bennett.*

Steffensen, J. F.: Zur Theorie der Invaliditätstafel. Aktuár. Vědy 6, 1—9 (1936).

Wird Lebensversicherung mit Invaliditätsversicherung kombiniert, so müssen die Sterbeintensitäten μ_x einer gewöhnlichen Sterbetafel mit den Sterbeintensitäten μ_x^i der Invaliden und den Invalidisierungsintensitäten μ_x^β gleichzeitig zur Verwendung gelangen. Aus diesen Grundlagen kann man die Sterbeintensitäten μ_x^α der Aktiven, die Anzahl l_x der Lebenden, die Anzahl l_x^a der Aktiven unter den Lebenden, die Anzahl l_x^i der Invaliden unter den Lebenden u. a. berechnen. Wenn die Grundlagen $\mu_x, \mu_x^i, \mu_x^\beta$ aus verschiedenem Beobachtungsmaterial stammen, so kann sich dabei für gewisse x etwa $l_x^i > l_x$ oder $\mu_x^\alpha < 0$ ergeben, was die gewählten Grundlagen als miteinander unvereinbar kennzeichnen würde. — Verf. zeigt zunächst an einem Beispiel, daß die Annahme (*) $\mu_x > 0, \mu_x^i > 0, \mu_x^\beta > 0$ solche Widersprüche nicht ausschließt. Macht man jedoch außer (*) die weitere Annahme (**) $\mu_x^i > \mu_x$, so erhält man $l_x^a > 0$, also

mit Rücksicht auf $l_x = l_x^a + l_x^i$ auch $l_x^i < l_x$. Bezeichnet man $l_x^\beta = l_{x_0} \cdot e^{-\int_{x_0}^x \mu_s^\beta ds}$, $x_0 = \text{Anfangsalter, in welchem keine Invaliden vorkommen, und macht außer (*) und (**)}$ noch die Annahme (***) $\mu_x^i < \frac{\mu_x}{1 - \frac{l_x^\beta}{l_{x_0}^\beta}}$, so wird auch $\mu_x^\alpha > 0$ sichergestellt. — Zum

Schluß wird ein für numerische Rechnung bequemer Ansatz mitgeteilt. *Birnbaum.*

Lukács, Eugen: Über eine Beziehung zwischen unsymmetrischen Kapitalversicherungen und Überlebensrenten. Assekuranz-Jb. 55, 37—44 (1936).

Mit $\bar{A}_{\overset{r}{1}x_1 \overset{r}{2}x_2 \dots \overset{r}{r}x_r \overset{r}{r+1} \dots x_n}$ werde der Barwert einer Versicherung bezeichnet, bei welcher der Betrag 1 zur Auszahlung gelangt, wenn von den n Versicherten mit den Eintrittsaltern x_1, \dots, x_n der x_r -jährige als r -ter stirbt, vorher schon der x_1 -jährige als erster, der x_2 -jährige als zweiter usw., der x_{r-1} -jährige als $r-1$ -ter gestorben sind und die restlichen $n-r$ noch leben; ebenso bezeichne $\bar{a}_{\overset{r}{1}x_1 \overset{r}{2}x_2 \dots \overset{r}{r}x_r \overset{r}{r+1} \dots x_n}$ den Barwert einer Leibrente auf die verbundenen Leben x_{r+1}, \dots, x_n , welche nur dann gezahlt wird, wenn der x_1 -jährige als erster usw., der x_r -jährige als r -ter gestorben sind, während die restlichen noch leben. Es wird der Satz bewiesen: Die Absterbeordnungen für x_r, y_1, \dots, y_m seien nach Gompertz-Makeham ausgeglichen, d. h. für jede von diesen Variablen gelte die Beziehung $\mu_s = A + Bc^s$; dann ist

$$\bar{A}_{\overset{r}{1}x_1 \overset{r}{2}x_2 \dots \overset{r}{r}x_r \overset{r}{r+1} \dots y_m} = \frac{1}{m+1} c^{x_r-z} \cdot A_{\overset{r-1}{1}x_1 \dots \overset{r-1}{r-1}x_{r-1} \overset{r}{r}x_r y_1 \dots y_m - \left[\left(A + \frac{\delta}{m+1} \right) c^{x_r-z} - A \right] \cdot \bar{a}_{\overset{r-1}{1}x_1 \dots \overset{r-1}{r-1}x_{r-1} | x_r y_1 \dots y_m},$$

wobei z aus $(m+1) \cdot c^z = c^{x_r} + \sum_{i=1}^m c^{y_i}$ bestimmt wird. — Ohne irgendwelche Annahmen über die verwendeten Sterbetafeln wird nur die Beziehung

$$\bar{A}_{\overset{r}{1}x_1 \overset{r}{2}x_2 \dots \overset{r}{r}x_r} = \bar{A}_{\overset{r-1}{1}x_1 \overset{r-1}{2}x_2 \dots \overset{r-1}{r-1}x_{r-1}} - \delta \cdot \bar{a}_{\overset{r-1}{1}x_1 \overset{r-1}{2}x_2 \dots \overset{r-1}{r-1}x_{r-1} | x_r}$$

bewiesen.

Birnbaum (Lwów).

Schulthess, Harald: Volterrasche Integralgleichungen in der Versicherungsmathematik. Bern: Diss. 1935. 53 S.

Schulthess, Harald: Über die Verwendung von Integralgleichungen zur Berechnung der mathematischen Reserve (Deckungskapital). Bl. Versich.-Math. 3, 412—421 (1936).

Die erste Abhandlung befaßt sich mit der Anwendung Volterrascher Integralgleichungen auf ein allgemein formuliertes Problem mehrerer durch gegenseitige Über-

tritte miteinander verbundener Gesamtheiten mit bekannten bzw. gesuchten Übertrittsintensitäten; wesentlich neue Tatsachen werden nicht mitgeteilt. Ferner befaßt sich Verf. mit der Anwendung der Integralgleichungen auf Probleme der Deckungskapitalberechnung und gelangt zur Überzeugung, daß hier die Integralgleichungen ein unnötig kompliziertes Hilfsmittel bilden, welches immer durch einfachere Methoden ersetzt werden kann und weder theoretisch besseren Einblick in das Problem liefert noch rechnerisch von Nutzen ist. In der zweiten Abhandlung wird diese Ansicht ausführlich begründet.

Birnbaum (Lwów).

Numerische und graphische Methoden.

Boulad Bey, Farid: Sur les formes canoniques des équations d'ordre nomographique 6 et 5 représentables par des nomogrammes à échelles symétriques. C. R. Acad. Sci., Paris **203**, 150—153 (1936).

Behandlung von Fluchtlinientafeln mit zwei in bezug auf einen Punkt oder eine Gerade symmetrischen Leitern und einer dritten geradlinigen oder krummlinigen Leiter.

Rehbock (Bonn).

Callender, A., D. R. Hartree and A. Porter: Time-lag in a control system. Philos. Trans. Roy. Soc. London A **235**, 415—444 (1936).

Vom mathematischen Standpunkt aus gesehen wird das System

$$\ddot{\vartheta}(t) + m \dot{\vartheta}(t) - C(t) = D(t),$$

$$n_1 \vartheta(t) + n_2 \dot{\vartheta}(t) + n_3 \ddot{\vartheta}(t) + \dot{C}(t + T) = 0$$

mit bekannter Störfunktion $D(t)$ und bekannten Konstanten n_1, n_2, n_3, m, T für die Funktionen $\vartheta(t)$ und $C(t)$ behandelt; bei Elimination von $C(t)$ entsteht eine lineare Differenzen-Differentialgleichung für $\vartheta(t)$. Physikalisch liegt eine Theorie für Kontrollapparate, z. B. Thermostaten (t = Zeit, ϑ = Temperatur), vor; T ist die Verzögerung, mit welcher der Kontrollapparat auf eine Störung anspricht. Es genügt, Störungen von der Dauer T zu betrachten (die Wirkung einer längeren Störung läßt sich durch Überlagerung finden). Nach Aufheben der Störung ($D = 0$) liegt ein homogenes System vor, dessen Lösung mit Operatorenrechnung aus Grundlösungen $\vartheta = Q e^{\lambda t}$ zusammengesetzt wird, wie man das von gewöhnlichen Differentialgleichungen her kennt. Im Hinblick auf die Bestimmung von Konstanten n_1, n_2, n_3, m , für die der Kontrollapparat die konstant zu haltende Größe $\vartheta(t)$ möglichst schnell auf ihren Normalwert zurückführt, besprechen die Verff. ausführlich die charakteristische Gleichung und eine Anzahl konkreter Lösungen des Systems. Die Lösungen wurden meist mit einem in Manchester gebauten Modell der Maschine von Bush gezeichnet. Die mathematische Untersuchung wird durch schon erprobte Vorschläge zur Herstellung von Kontrollapparaten mit vorgeschriebenen Konstanten ergänzt.

Theodor Zech.

Kaiser, Heinrich: Grundriß der Fehlertheorie. (Zusammenfassende Darstellung.) Z. techn. Physik **17**, 219—226 (1936).

Vogt, Oskar: Über Beziehungen zwischen Fehlermassen. Bern: Diss. 1935. 112 S. u. 24 Abb.

This paper has for its subject, aside from considerable expository material, the study of the "moment quotient" $\lambda(\alpha)$ for a frequency function, which is defined as the reciprocal of the ordinate at the mean times the ratio of the α -th to the $(\alpha + 1)$ -st absolute moment computed about the mean. The special case for $\alpha = 1$ (called the "error quotient") has been studied for several frequency functions by Bortkewicz, Pearson, and Gumbel [see *Metron* **6**, No. 2, 65—86 (1926)] and a brief account of their work is given here. The properties of moment quotients are illustrated for special frequency functions, particularly for the system $C_0 e^{-h^\alpha |x|^\alpha}$. In general $\lambda(\alpha)$ is shown to be invariant under a linear transformation of the independent variable. The limiting value of $\lambda(\alpha)$ as $\alpha \rightarrow \infty$ is demonstrated finite and then is found ex-

plitly for the two cases of finite and infinite range. In the final section the author turns to the question of the determination of a symmetric frequency function in terms of its sequence of $\lambda(\alpha)$'s ($\alpha = 1, 2, \dots$). (It is noted that there are always infinitely many unsymmetric solutions if there is one symmetric one.) For a finite range the absolute moments are readily found in terms of the $\lambda(\alpha)$'s so that the well-known results of the corresponding moments problem are at once available. For an infinite range, the immediate formal solution in terms of the absolute moments by expansion in a series of Laguerre polynomials is given and illustrated. *C. C. Craig.*

Vajda, Stefan: *Beiträge zur Theorie der Ausgleichsformeln.* Bl. Versich.-Math. 3, 404—412 (1936).

Given the $2n+1$ observed values $u_0, u_1, \dots, u_n, u_{-1}, \dots, u_{-n}$, the author reconsiders the classical situation in which the coefficients c_0, \dots, c_j in the form $\sum_{r=0}^j c_r f_r(i) \equiv f(i)$, with given base functions $f_r(i)$ are determined by the least-squares principle, studying it when it is required that a single u , say u_0 , shall be reproduced. After noting that $f(0)$ is a linear function of the u_i 's, and that the coefficients p_i in $f(0) = \sum_i p_i u_i$ depend

only on the functions $f_r(i)$, he sets up a characteristic equation in p_i and $f(i)$, $i = 0, 1, \dots, -n$, that is the necessary and sufficient condition that u_0 be reproduced by the least-squares procedure when a set of base functions exist so that $u_i = f(i)$ for each i . It is shown that the characteristic equation plus the condition that $\sum p_i^2$ shall be a minimum is equivalent to the least-squares procedure for determining the set of p_i 's. Next conditions under which the graduation function $f(i)$ is symmetrical are studied. It is demonstrated that any set of $2n$ base functions $g_t(i)$, $t = 1, 2, \dots$, which satisfy the characteristic equation, form a fundamental set of such functions. A numerical example is appended. *C. C. Craig* (Ann Arbor, Mich.).

Sterne, T. E., and W. Edwards Deming: *The accuracy of least-squares solutions.* Physic. Rev., II. s. 49, 857—858 (1936).

This note discusses three common meanings of "probable error" in relation to the estimation of parameters by least squares to clear up apparent differences between the author and Deming. [See W. E. Deming, Physic. Rev. 49, 243 (1936); this Zbl. 13, 361; and Sterne, this Zbl. 10, 409.] *C. C. Craig* (Ann Arbor, Mich.).

Sibirani, F.: *Aleune osservazioni sull'interpolazione col metodo dei minimi quadrati.* Giorn. Ist. Ital. Attuari 7, 36—41 (1936).

Gegeben seien n Punkte $P_i(x_i, y_i)$, $i = 1, \dots, n$, von welchen $n - m$ auf einer durch ein Polynom $y = f(x)$ vom Grade r definierten Kurve und die restlichen m außerhalb dieser Kurve liegen. Für die Punkte P_1, P_2, \dots, P_n soll mit der Methode der kleinsten Quadrate ein Interpolationspolynom vom Grade r angegeben werden. Es werden die folgenden Fragen beantwortet: Wann ist schon $y = f(x)$ das mit der Methode der kleinsten Quadrate bestimmte Interpolationspolynom? Wann hat das Interpolationspolynom die Gestalt $y = f(x) + c$? Ferner wird unter der zusätzlichen Annahme, daß die m außerhalb von $y = f(x)$ gelegenen Punkte auf einer Kurve $y = f(x) + \varepsilon$ liegen, untersucht, wann das Interpolationspolynom die Gestalt $y = f(x) + \text{konst.}$ annehmen kann. *Birnbaum* (Lwów).

Nyström, E. J.: *Ein Instrument zur Auswertung von Stieltjesintegralen.* Soc. Sci. Fennica. Comment. phys.-math. 9, H. 4, 1—18 (1936).

Zum Auswerten des Stieltjesintegrals $\int f(x) d h(x)$ ist ein gewöhnliches Planimeter geeignet, wenn die Kurve mit der Parameterdarstellung $\xi = h(x)$, $\eta = f(x)$ gezeichnet vorliegt. Das Nyströmsche Instrument soll das Zeichnen dieser Kurve $\eta(\xi)$ unnötig machen, wenn $\xi = h(x)$ und $\eta = f(x)$ auf einzelnen Blättern in Kurvenform vorliegen. Anwendungsbeispiele sind: Koeffizienten der Entwicklung von $f(x)$ nach Kugelfunktionen (überhaupt nach Orthogonalsystemen), von statischen und Trägheitsmomenten, von Flächeninhalten in ungleichmäßigen Netzen u. dgl. Für jeden dieser Verwendungs-

zwecke braucht man eine oder einige passende Kurven $\xi = h(x)$, die ein für allemal gezeichnet vorrätig sein können. Nyströms Instrument ist ein harmonischer Analysator Mader-Ott, in dem Zahnstange und Zahnräder fehlen dürfen, der dafür im größeren Wagen eine Schlitteneinrichtung zum Einhängen des Planimeters enthält. Das Blatt mit der Kurve $\eta = f(x)$ wird unter das Gerät gelegt, das Blatt mit $\xi = h(x)$ am kleineren Analysatorwagen befestigt. Zwei Personen bedienen das Instrument; eine fährt mit dem Analysatorfahrstift die $f(x)$ -Kurve nach, die andere sucht währenddessen durch Schlittenverschiebung eine am Schlitten befindliche Marke auf der vorbeigleitenden $h(x)$ -Kurve zu halten. Diese Art der Bedienung dürfte nicht ganz angenehm sein, liegt aber in der Natur der gestellten Aufgabe. In einem gewissen ξ, η -System (mit krummen Linien $\eta = \text{konst.}$) beschreibt der Planimeterfahrstift die erwähnte Kurve $\eta(\xi)$, das Planimeter zeigt also $\int \eta d\xi$, d. h. das Stieltjesintegral an. Die Theorie ist von der des Analysators Mader-Ott nur wenig verschieden. Für die Benutzung gibt Nyström einige interessante und sicher sehr nützliche Winke. *Zech.*

● **Bauschinger, J., und J. Peters:** Logarithmisch-trigonometrische Tafeln mit acht Dezimalstellen, enthaltend die Logarithmen aller Zahlen von 1—200 000 und die Logarithmen der trigonometrischen Funktionen für jede Sexagesimalsekunde des Quadranten. Bd. 1 u. 2. 2. durchges. Aufl. Leipzig: W. Engelmann 1936. Bd. 1: XIV, 367 S., Bd. 2: 951 S. RM. 58.—

Hristow, Wl. K.: Eine Reihe zur Berechnung der Subtraktionslogarithmen für kleine Argumentwerke. *Astron. Nachr.* 260, 173—174 (1936).

Rohrberg, Albert: Die Anpassung des Rechenstabes an den Rechenbedarf der Gegenwart. *Z. Instrumentenkde* 56, 322—328 (1936).

Geometrie.

Richter, Hans: Ein Beweis der Relationen von Vahlen. *Math. Ann.* 113, 206—207 (1936).

Zwischen den Plückerschen Koordinaten $\pi_{i_1 i_2 \dots i_d}$ eines Raumes S_{d-1} in S_n bestehen bekanntlich lineare und quadratische Relationen. Es wird elementar gezeigt, daß die Relationen d -ten Grades von Vahlen Folgen dieser linearen und quadratischen Relationen sind. Gleichzeitig ergibt sich ein neuer Beweis dafür, daß die letzteren Relationen auch hinreichend dafür sind, daß die $\pi_{i_1 \dots i_d}$ Plückersche Koordinaten eines Raumes S_{d-1} sind. *van der Waerden* (Leipzig).

Perepelkine, D.: Sur les invariants angulaires d'un espace à n dimensions. *Bull. Soc. phys.-math. Kazan*, III. s. 7, 55—62 u. franz. Zusammenfassung 62—63 (1936) [Russisch].

L'auteur pose le problème de la recherche des invariants angulaires des deux variétés planes R_p et R_q et il montre que le système complet des invariants angulaires indépendants rationels des ces variétés forme le système des invariants orthogonaux d'un tenseur du 2^d rang. L'auteur montre ensuite le sens géométrique de ce tenseur.

Nil Glagoleff (Moskau).

Blaschke, Wilhelm: Über Integralgeometrie. *Jber. Deutsch. Math.-Verein.* 46, 139—152 (1936).

Bericht über einige neuere Untersuchungen des Verf. und seiner Mitarbeiter (vgl. insbes. dies. Zbl. 14, 119, 219 u. 274). Literaturverzeichnis. *W. Fenchel.*

● **Blaschke, W.:** Vorlesungen über Integralgeometrie. H. 1. 2. erw. Aufl. (Hamburg. math. Einzelschriften. H. 20.) Leipzig u. Berlin: B. G. Teubner 1936. 60 S. u. 21 Fig. RM. 5.—

Vgl. die Besprechung der 1. Aufl. (dies. Zbl. 12, 414); in der neuen sind außer einigen Aufgaben mehrere Paragraphen hinzugekommen. Sie behandeln die Erweiterung einer Formel von Santaló [Formel (1) des genannten Ref.] auf nicht konvexe Figuren zur „kinematischen Hauptformel“ und eine Verallgemeinerung des früher nur für Kurven endlicher

Ordnung bewiesenen Satzes von Crofton, daß die Länge einer Kurve gleich der „Anzahl“ ihrer Treffgeraden ist. — Es seien \mathfrak{G}_0 und \mathfrak{G}_1 zwei ebene Gebiete, \mathfrak{G}_0 fest, \mathfrak{G}_1 starr beweglich. F_i , U_i , K_i seien Flächeninhalt, Umfang bzw. Totalkrümmung des Randes von \mathfrak{G}_i ; ferner K_{01} die Totalkrümmung des Durchschnitts von \mathfrak{G}_0 und \mathfrak{G}_1 und $\dot{\mathfrak{G}}_1$ die kinematische Dichte von \mathfrak{G}_1 . Dann lautet die Hauptformel für die Ebene

$$\int K_{01} \dot{\mathfrak{G}}_1 = 2\pi (K_0 F_1 + U_0 U_1 + F_0 K_1).$$

Sie wird bewiesen: erstens nach Maak für stetig gekrümmte Jordan-Kurven, zweitens für Komplexe auf dem vom Verf. im räumlichen Fall beschrittenen Wege (vgl. dies. Zbl. 14, 274). Als einfache Anwendung wird die Verschärfung der isoperimetrischen Ungleichung von Bonnesen für nicht notwendig konvexe Jordan-Kurven gewonnen. — Der erwähnte Satz von Crofton wird nach Maak in folgender Fassung bewiesen: Ist $n(g)$ die Anzahl der Schnittpunkte einer rektifizierbaren stetigen Kurve mit der Geraden g und \dot{g} die Geradendichte, so existiert $\frac{1}{2} \int n(g) \dot{g}$ im Sinne von Lebesgue und ist gleich der Länge der Kurve. Ergänzend wird gezeigt, daß es hierbei gleichgültig ist, ob Stützpunkte mitgezählt werden oder nicht.

W. Fenchel (Kopenhagen).

Sz. Nagy, Julius v.: Über die Buschenveloppen von H. Brunn. Math. Z. 41, 479 bis 492 (1936).

Unter einer Buschenvelope werde (mit H. Brunn) eine beschränkte, ebene Kurve (d. h. hier ein eindeutiges, mit stetiger Tangente versehenes Kreisbild) verstanden, welche zu jeder Richtung genau eine einfache Tangente besitzt. Verf. zeigt: Eine Buschenvelope mit genau r (Dorn-) Spitzen, kurz mit B_r bezeichnet, ist Summe von $r = 2t + 1 \geq 3$ Konvexbogen, so daß stets $r \equiv 1$. Beispiele: Hypozykloiden mit dem Halbmesserverhältnis $2r$: ($r - 1$). Für die Anzahl d der Doppelpunkte einer B_r gilt: $d = \frac{r-3}{2} + 2q$, mit $0 \leq q \leq \frac{(r-1)(r-3)}{2}$, und zu jedem solchen ganzzahligen q gibt es B_r (Maximum von d z. B. bei den eben genannten Hypozykloiden). Ist k bzw. n die Klasse bzw. Ordnung von B_r , so gilt: $k \leq n - 1 \leq r$. Für jedes $r \geq 3$ ist $k = r$ möglich, für jedes $r \geq 5$ gibt es B_r , welche von der maximalen Ordnung $n = r + 1$ und zugleich von der minimalen Klasse $k = 5$ sind. — Von den vier in einem Doppelpunkte zusammenstoßenden konvexen Teilbogen wird eine konvexe und eine konkave Ecke gebildet; deformiert man letztere geeignet in eine Dornspitze so, daß zugleich der Doppelpunkt verschwindet, so spricht man von einer Durchschneidung. Durch eine solche wird eine B_r in die Summe einer B_n und einer B_r verwandelt, durch geeignete $\frac{r-3}{2}$ Durchschneidungen in die Summe von $\frac{r-1}{2}$ Buschenveloppen B_3 . Jede B_r läßt sich durch gewisse stetige Deformationen in eine B_r mit maximalem d überführen.

Haupt (Erlangen).

Sauter, Ilse: Zur Theorie der Bogen n -ter (Realitäts-) Ordnung im projektiven R_n . I. Math. Z. 41, 507—536 (1936).

Diese Arbeit schließt an die Arbeit von O. Haupt an: Über die Erweiterung eines beliebigen Bogens dritter Ordnung, insbesondere zu einer Raumkurve dritter Ordnung (J. reine angew. Math. 170; dies. Zbl. 8, 170), und verallgemeinert die dort für den Raum R_3 erhaltenen Resultate auf den Fall des R_n . Ein Bogen n -ter Ordnung im R_n bedeutet ein eindeutiges, stetiges Streckenbild, wobei die Bilder der Streckenendpunkte verschiedene Punkte von R_n sind. Ein Bogen n -ter Ordnung im R_n wird von jeder Hyperebene in höchstens n Punkten getroffen. Nach einer eingehenden Untersuchung der Bogen n -ter Ordnung im R_n wird der Erweiterungssatz bewiesen: Jeder Bogen n -ter Ordnung im R_n kann mit bestimmten Ausnahmen ordnungsfest erweitert werden, insbesondere zu einer geschlossenen Kurve. Nur die Fälle bilden Ausnahmen, in denen ein k -dimensionaler Tangentialschmiegrau des Anfangspunktes des Bogens mit dem $(n-k-1)$ -dimensionalen Tangentialschmiegrau des Endpunktes mindestens einen Punkt gemeinsam hat. Die Arbeit gibt auch eine Konstruktion an, die einen Bogen n -ter Ordnung zu einer Kurve n -ter Ordnung erweitert. Diese Konstruktion ist die natürliche Verallgemeinerung des Konstruktionsverfahrens von Haupt im Falle R_3 .

Sz. Nagy (Szeged).

Haupt, Otto: Über ebene Punktmenge mit überall unendlicher Krümmung. *J. reine angew. Math.* **175**, 221—223 (1936).

In geometrischer Weise wird bewiesen: Eine ebene Punktmenge M , deren Tangentialkrümmung in jedem (zu M gehörigen) Häufungspunkte von M unendlich ist, muß punkthaft sein. — Zur Definition der Tangentialkrümmung von M in P geht man dabei von den Kreisen aus, die mit M irgendeine Tangente in P und außerdem einen benachbarten Punkt gemeinsam haben. Ansätze zu etwas spezielleren Sätzen in derselben Richtung bei Brunold und Bouligand, vgl. dies. Zbl. **9**, 56. *W. Feller.*

Algebraische Geometrie:

● **Telling, H. G.:** The rational quartic curve in space of three and four dimensions. Being an introduction to rational curves. (Cambridge tracts in math. a. math. physics. Nr. 34.) London: Cambridge univ. press 1936. VI, 78 pag. 5/-.

Organisch geordnete Darstellung der Eigenschaften der rationalen Kurven im S_4 und S_3 ; zahlreiche Sätze sind als Übungen nur angedeutet, so daß die Hauptlinien der Theorie in besserem Licht erscheinen. Im 1. Kap. die rationalen normalen C^4 : Definitionen, Gleichungen, projektive Erzeugungen, fundamentale Polarität, Sehnen, Ebenen die C^4 3mal schneiden; Invariantentheorie in symbolischer Schreibweise; Involutionen 2. Ordnung auf C^4 ; V_3 Ort der Sehnen, Fläche K Ort der Schnittpunkte von zwei Schmiegeebenen und die V_3^3 , die K enthalten; lineare Strahlenkomplexe, die die Tangenten von C^4 enthalten. Im 2. Kap. die rationalen C^4 des Raumes S_3 : ihre Grundform 4. Grades, die Hauptinvolutionen, die Inflexionspunkte, die Ebenen, die C^4 2mal berühren; die mit C^4 verbundene Steinersche Fläche; verschiedene besondere C^4 . Als Anhang die Involutionen 5. und 6. Ordnung auf einer rationalen C^4 .

E. G. Togliatti (Genova).

Milne, William P.: Three tritangent planes of the quadricubic curve. *Proc. London Math. Soc.*, II. s. **41**, 454—461 (1936).

Eine analytische Darstellung der Schnitt- C^6 einer Quadrik und einer F^3 im dreidimensionalen Raume. Als Koordinatenebenen $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ werden drei Dreitangentialebenen der Kurve gewählt; eine geeignete Form der Koeffizienten der beiden C^6 -Gleichungen läßt die Möglichkeit von zwei verschiedenen Fällen erkennen: Entweder liegen die 9 Berührungspunkte der Kurve mit $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ auf der Basiskurve C^4 eines Quadrikbüschels oder sie liegen auf einer einzigen Quadrik, derjenigen, die die C^6 auch enthält. Im 1. Fall haben C^6 und C^4 drei weitere Punkte gemein, die die Berührungspunkte der C^6 mit einer vierten Dreitangentialebene sind, so daß die 4 Ebenen, irgendwie auf zwei Paare verteilt, zwei Quadriken derselben Schar von Berührungsquadriken liefern. Die Berührungspunkte von C^6 mit zwei der Ebenen $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ bestimmen eine kubische Raumkurve, die, zusammen mit C^6 , auf einer viernodalen F^3 liegt; man hat so drei solche Flächen Γ_1 , Γ_2 , Γ_3 ; zwei von ihnen, z. B. Γ_2 und Γ_3 , schneiden sich noch, außer in C^6 , in einer ebenen Kurve 3. Ordnung C_1 ; die Tangentialkegel von Γ_2 und Γ_3 , aus Punkten von Γ_2 und Γ_3 selbst, schneiden die Ebene von C_1 in Kegelschnittpaaren, die im 1. Falle demselben System und im 2. Falle verschiedenen Systemen von Berührungskegelschnitten angehören. Im 2. Falle erhält man auch leicht den bekannten Satz, daß die 9 Berührungspunkte der C^6 mit $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ vom Punkte $x = y = z = 0$ aus durch 9 Geraden projiziert werden, die auf ∞^1 Kegel 3. Ordnung liegen (s. auch H. W. Richmond, dies. Zbl. **12**, 123).

E. G. Togliatti (Genova).

Chisini, Oscar: La rappresentazione torica di una curva algebrica nell'intorno di un suo punto singolare. *Ist. Lombardo, Rend.*, II. s. **69**, 209—218 (1936).

Diese Abhandlung beschäftigt sich mit der Darstellung einer ebenen algebraischen Kurve $f(xy) = 0$ durch ein System reeller Raumlinien (dies. Zbl. **8**, 220). Setzt man $x = x_1 + ix_2$, $y = y_1 + iy_2$, $f(xy) = f(x_1x_2y_1y_2) + if_2(x_1x_2y_1y_2)$, wo f_1, f_2 reelle Funktionen bedeuten, so erhält man eine Darstellung der gegebenen Kurve auf einer

reellen Fläche F eines vierdimensionalen Raumes; diese Fläche wird dann mit der Quadrik $y_1 = \lambda(x_1^2 + x_2^2 - 1)$ geschnitten; und die so gewonnene Schnittlinie wird auf einem S_3 durch die Formeln $X = x_1$, $Y = x_2$, $Z = \frac{y_2}{2\lambda}$ projiziert und homographisch transformiert. Man erhält so eine Raumkurve C , die eine geeignete Darstellung der Umgebung des Punktes $x = y = 0$ auf $f(xy) = 0$ liefert; wenn die algebraische Funktion $y(x)$ in jener Umgebung h Werte besitzt, und wenn λ groß genug gewählt wird, so hat die orthogonale Projektion C' von C auf $Z = 0$ mit jeder Halbgeraden aus $X = Y = 0$ genau h Schnittpunkte, die dem Kreise L mit der Gleichung $X^2 + Y^2 = 1$ beliebig nahe liegen. Legt man die Ebene $y_1 y_2$ so, daß ihr Anfangspunkt $y_1 = y_2 = 0$ auf L liege, daß die Verlängerung von y_1 durch $X = Y = 0$ hindurchgehe und daß y_2 parallel zu Z sei, so beschreiben die den Schnittpunkten $y_1 C'$ entsprechenden Punkte $(y_1 y_2)$ eine neue Kurve K , die die Kurve C ersetzen kann; K unterscheidet sich von C nur durch unendlich kleine Größen 2. Ordnung. Die Anwendung dieser Konstruktion der beiden Linien $y = 0$ und $y = x^n$, die im Anfangspunkt eine Berührung n -ter Ordnung aufweisen, gibt bzw. den Kreis L und eine Raumkurve K , die n Windungen um L macht; sie ist wie eine Schraubenlinie auf einer Torusfläche. *E. G. Togliatti.*

Zariski, Oscar: On the Poincaré group of rational plane curves. Amer. J. Math. 58, 607—619 (1936).

Die ebenen Kurven werden als zweidimensionale Gebilde V_2 im vierdimensionalen Raum R_4 zweier komplexer Veränderlicher aufgefaßt. Die Gruppe der Kurve ist die Poincarésche Fundamentalgruppe des Außenraumes $R_4 - V_2$. Direkt bestimmt wird die Gruppe der rationalen Kurve mit maximaler Spitzenzahl von gerader Ordnung $2n - 2$. Ihre Gruppe ist isomorph zur Gruppe der Abbildungsklasse der n -mal gezeichneten zweidimensionalen Kugel und also homomorph zu der Gruppe der Zöpfe aus n Fäden. — Alsdann werden die Gruppen der Kurven ermittelt, die sich als Grenzfälle der obigen Maximalkurve auffassen lassen; sie sind bis auf einen Ausnahmefall für $n = 4$ zyklisch. — Die Relationen der Zopfgruppe werden erneut und vereinfacht abgeleitet. Die Arbeit setzt wesentlich das Ergebnis einer Note des Verf. voraus, die in den Ann. of Math. unter dem Titel „A theorem on the Poincaré group of algebraic hypersurfaces“ erscheinen soll.

K. Reidemeister (Marburg a. d. L.).

Kontorowitsch, P.: Über eine untere Abschätzung der Anzahl der Weierstrass-Punkte in einem nicht-hyperelliptischen algebraischen Funktionenkörper. Bull. Soc. phys.-math. Kazan, III. s. 7, 99—101 u. deutsch. Zusammenfassung 101 (1936) [Russisch].

If r denotes the number of Weierstrass points on an algebraic curve f of genus p , then according to Hurwitz $r \geq 2p + 2$, and $r = 2p + 2$, only if f is hyperelliptic. In the present paper it is shown that if f is not hyperelliptic, then the stronger inequality holds: $r \geq \frac{6(p-1)(p+1)}{3p-5}$. For $p = 3$ this yields $r \geq 12$, and this inequality, as Hurwitz has shown, cannot be bettered.

O. Zariski (Baltimore).

Wiman, A.: Über die Cayleysche Regelfläche dritten Grades. Math. Ann. 113, 161—198 (1936).

Die Cayleysche Regelfläche R_3 ist derjenige Grenzfall der allgemeinen Regelfläche 3. Grades, für welchen die beiden Leitlinien und die beiden Torsalen in einer einzigen „Hauptgeraden“ $z = w = 0$ zusammenfallen. Ihre Gleichung kann auf die Gestalt

$$yw^2 - 3xzw + 2z^3 = 0 \quad (1)$$

gebracht werden. Sie ist zu sich selbst dual. Sie gestattet eine dreigliedrige projektive Gruppe Γ_3 , welche auch die „Hauptebene“ $w = 0$, sonst aber keine Fläche invariant läßt. Die Bahnkurven der eingliedrigen Untergruppen Γ_1 von Γ_3 sind in einem Fall Geraden einer speziellen linearen Kongruenz, in allen anderen Fällen kubische Raumkurven C_3 , welche die Hauptgerade im „Hauptpunkt“ $x = z = w = 0$ berühren und

die Hauptebene dort schmiegen. Auf der Fläche liegen ∞^3 solche C_3 , darunter die ∞^1 asymptotischen Kurven der Fläche. Es gibt einen eingliedrigen Normalteiler in Γ_3 , der alle Erzeugenden der R_3 invariant läßt, und einen, der alle asymptotischen Kurven invariant läßt. Diese beiden erzeugen einen zweigliedrigen Normalteiler Γ_2 , der alle Flächen des Büschels

$$yw^2 - 3xzw + 2z^3 - \lambda w^3 = 0 \quad (2)$$

invariant läßt. Außerdem gibt es ∞^1 Untergruppen Γ'_2 , welche je eine Erzeugende, und ∞^1 Untergruppen Γ''_2 , welche je eine asymptotische Kurve invariant lassen. Eine Untergruppe Γ'_2 läßt die Flächen eines Büschels von Cayleyschen R_3 invariant, während eine Untergruppe Γ''_2 ein Büschel von Flächen 6. Ordnung F_6 , zu dem die doppelt gezählte R_3 gehört, invariant läßt. — Die Cayleysche R_3 läßt sich birational auf eine (t, u) -Ebene abbilden; die Erzeugenden gehen dabei in Geraden $t = c$ und die asymptotischen Kurven in Geraden $u = c$ über, während die Gruppe Γ_3 durch die Gruppe

$$t' = at + b, \quad u' = a^2t + c$$

abgebildet wird. Die Flächen F_6 lassen sich ebenfalls auf Ebenen abbilden und ihre asymptotischen Kurven sind kubische Raumkurven C_3 . — Es gibt ein Büschel von Geradenkomplexen 6. Ordnung, welche alle bei Γ_3 invariant bleiben. Das Büschel enthält einen dreifach gezählten quadratischen Komplex, der einen Grenzfall eines tetraedralen Komplexes darstellt, aus den Haupttangente der Flächen des Büschels (2) besteht und eine fünfgliedrige projektive Gruppe Γ_5 gestattet. Bei einer zweigliedrigen Untergruppe $\Gamma_2^{(n)}$ von Γ_3 zerfällt jeder Komplex des Büschels in ∞^1 invariante Kongruenzen, welche je zwei Flächen des bei $\Gamma_2^{(n)}$ invarianten Flächenbüschels zu Brennpunkten haben. Diese Kongruenzen werden ausführlich untersucht. Außerdem wird noch eine zu der R_3 analoge Regelfläche 4. Ordnung betrachtet, deren asymptotische Kurven ebenfalls C_3 sind. Für weitere Einzelheiten muß auf die reichhaltige Abhandlung verwiesen werden.

van der Waerden (Leipzig).

Danielsson, Olafur: Über orientierbare und nicht orientierbare algebraische Flächen. Math. Ann. 113, 83—94 (1936).

A special class of real rational surfaces is investigated as to orientability and as to the possibility of cutting out from the surface a Moebius strip. In the final statement it appears that the surfaces under consideration distribute into two classes, according as the mapping upon the plane possesses in the plane (1) only isolated fundamental points and no fundamental curves, or (2) only two fundamental points and as fundamental the line joining them. In the first case the surface is non-orientable and possesses Moebius strips, in the second case the surface is orientable. O. Zariski.

Waerden, B. L. van der: Zur algebraischen Geometrie. Berichtigung und Ergänzungen. Math. Ann. 113, 36—39 (1936).

The Author clears up a few minor points scattered in his sequence of papers "Zur algebraischen Geometrie" (see this Zbl. 6, 365; 7, 74, 226, 421; 9, 225, 226; 12, 119), filling in some omitted proofs and correcting in one instance the original proof. These additions concern: 1. the behaviour of a prime ideal under a purely transcendental extension of the underlying field; 2. the expression of the coordinates of the intersection of an algebraic curve with the general hypersurface of a pencil as an algebraic function of the parameter of the pencil; 3. the Bertini theorem on the multiple points of the general curve of a linear system on an algebraic surface; 4. a dimensionality theorem in the theory of algebraic correspondences. O. Zariski.

Segre, B.: Sulle varietà di Veronese a due indici. II. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 23, 391—397 (1936).

Zweiter und letzter Teil einer Untersuchung über Veronesesche Mannigfaltigkeiten (s. dies. Zbl. 14, 227). Wichtig sind die Beziehungen zwischen den $\Pi^{(r)}$ und $\Pi^{(s)}$ eines Punktes P , wenn $r + s = n + 1$; erstens entsprechen sie sich in einer Homologie, welche P als Zentrum, die Polaryhyperebene π von P in bezug auf $\Phi^{(1)}$ als Homologie-

hyperebene und $-r:s$ als Charakteristik besitzt; zweitens erhält man $\Pi^{(r)}$ als Ort derjenigen Punkte von $\Phi^{(r)}$, deren Verbindungsgeraden mit P sich noch auf $\Phi^{(s)}$ (in einem Punkte) stützen. Diese zweite Eigenschaft führt zu folgenden Konstruktionen von $\Pi^{(r)}$: Wenn $r < s$, ist $\Pi^{(r)}$ die übrige Schnittmannigfaltigkeit von $\Phi^{(r)}$ mit dem Projektionskegel $P\Phi^{(s)}$; wenn $r = s$, ist $\Pi^{(r)}$ Ort der Punktepaare von $\Phi^{(r)}$, die mit P in gerader Linie liegen; wenn $r > s$ ist, kann man zunächst $\Pi^{(s)}$ konstruieren, um dann die Homologie anzuwenden, wovon oben die Rede war. Die so gewonnene Konstruktion von $\Pi^{(r)}$ gestattet, die Ordnung von $\Pi^{(r)}$ zu bestimmen; zu diesem Zweck wird hier als Anwendung einer anderen Untersuchung des Verf. (s. dies. Zbl. 13, 416) und der Schubertschen Charakteristikentheorie für die Quadriken eines Raumes S_n ein allgemeines Verfahren angegeben; die praktische Ausführung der Rechnungen bietet aber große Schwierigkeiten und wird hier nur für $r = 2, s = n - 1$ wirklich ausgeführt.

E. G. Togliatti (Genova).

Baker, H. F.: On the proof of a lemma enunciated by Severi. Proc. Cambridge Philos. Soc. 32, 253—259 (1936).

Severi enunciated the following lemma: if an irreducible algebraic series of sets of s points of index r , on an algebraic curve enjoys the property that the sets of rs points which consist of the r sets of the series which contain a given point move in a linear series, then the sets of s points of the series itself move in a linear series. The Author discusses the connection between this lemma and a theorem on algebraic correspondences (s, r) between two curves C and D suggested by the author elsewhere. Let

$$\sum_{i=1}^r v_j(z_i) \equiv \sum_{k=1}^p M_{j,k} u_k(x), \quad j = 1, 2, \dots, q; \quad \sum_{i=1}^s u_j(x_i) \equiv \sum_{k=1}^p N_{j,k} v_k(z), \quad j = 1, 2, \dots, p,$$

be the Hurwitz equivalences of the correspondence, where u_k and v_k are the Abelian integrals of the first kind attached to C and D respectively. It is well known that the matrices $M = (M_{j,k})$ and $N = (N_{j,k})$ have the same rank n . Among the p integrals Nv there are n independent ones, and on the other hand there exist exactly $q - n$

independent integrals v for which the sums $\sum_{i=1}^r v(z_i)$ are identically zero. The theorem

suggested is to the effect that these last integrals are independent of the integrals Nv . From this theorem Severi's lemma would follow, while the lemma itself strongly suggests that the theorem is true. We are informed that since the paper was written, Hodge has shown the author a proof of the theorem. There is a good deal of evidence, however not conclusive, in support of the statement that the matrix MN is of rank n . The Author is well justified in his implicit criticism of Severi's proof of the lemma. There remains the proof given by Castelnuovo, which is based on an enumerative formula by Schubert and which is entirely rigorous. *O. Zariski.*

Lunell, Einar: Über eine Methode der abzählenden Geometrie. Ark. Mat. Astron. Fys. 25 A, Nr 19, 1—12 (1936).

Eine Betrachtung von Zeuthen über Korrespondenzen ohne Wertigkeit (Zeuthen, Abzählende Methoden, S. 220—222, Leipzig 1914) wird kritisiert. Zeuthen hat auf einer Regelfläche der Ordnung 16 und vom Geschlechte S , bestehend aus den Geraden, welche einen Kegelschnitt C_2 , eine Gerade L und eine Kurve 4. Ordnung C_4 vom Geschlechte 1 schneiden, eine $(1,1)$ -Korrespondenz betrachtet, welche keine Wertigkeit besitzt und behauptet, das läge daran, daß die Regelfläche nicht durch Erteilung von neuen Doppelgeraden rational gemacht werden könne, ohne zu zerfallen. Hier wird nachgewiesen, daß diese Erklärung irrig ist: Man kann die Lage der Kurven L, C_2, C_4 so spezialisieren, daß Doppelgeraden mit zwei sich berührenden Mänteln entstehen und dadurch die Regelfläche rational wird. Die Zeuthensche Herleitung der Cayley-Brillschen Koinzidenzformel wird damit hinfällig.

van der Waerden (Leipzig).

Differentialgeometrie:

Engel, Friedrich: Zur Theorie der Translationsflächen. Rend. Circ. mat. Palermo **59**, 165—184 (1935).

A surface of translation with respect to a given plane is defined as the projective transform of a surface of translation (in the ordinary sense) the plane at infinity being transformed into the given plane. The author considers the problem of finding surfaces of translation with respect to two planes having plane generating curves. The general problem was known to Lie but has not been solved. By an affine transformation a surface of translation may be put in the form $z = X + Y$, where X is a function of x alone and Y one of y alone; this surface is to be one of translation with respect to the plane $x = 0$ and $x = \text{const.}$ This leads to a functional differential equation (20) containing X , Y and Y_1 ; two cases are considered, first $Y''' = 0$ and the possible solutions that go with it and secondly $Y_1 = cY''': Y''^2$ with its solutions. It is then shown that these are the only solutions and the author obtains the equations of some of the translation surfaces and their generating curves. *M. S. Knebelman.*

Ortlepp, Waldemar: Eine Abwandlung des Problems der Minimal-Rotationsflächen. Dresden: Diss. 1935. 20 S. u. 3 Fig.

Given, in the XZ -plane, a curve $z = f(x)$, consider the surface with equations $X = x \cos t \cdot \exp(\sin t)$, $Y = x \sin t \cdot \exp(\sin t)$, $Z = f(x)$. The author discusses the problem of minimizing the area of this surface by proper choice of the function $f(x)$. The area is given by a double integral with integrand $x \exp(2 \sin t) \cdot [1 + f'(x)^2 a]^{1/2}$, where $a = (1 + \cos^2 t) / \exp(2 \sin t)$. The Euler-Lagrange equation is found to have the form $a f'(x)^3 + f'(x) + x f''(x) = 0$. This equation is solved explicitly in terms of elementary functions. The conditions of Legendre and Weierstrass are also discussed, although not as completely as the analogy with the classical problem of the surface of revolution with minimum area would suggest. *Tibor Radó (Columbus).*

Tsuboko, Matsuji: On space curves whose tangents belong to a linear complex. Mem. Ryojun Coll. Engrg **9**, 41—48 (1936).

L'A. commence par étudier, au point de vue projectif-différentiel, une courbe plane L ayant un point O sextatique, c'est-à-dire telle que la conique L_2 osculatrice à L en O ait dans ce point un contact du 5-ème ordre avec L . Sur la droite L_1 tangente à L en O il considère d'abord le point H d'Halphen, pour lequel passent les ∞^1 cubiques ayant un contact du 7-ème ordre avec L en O . Parmi ces cubiques il y en a une, L_3 , admettant H comme point d'inflexion, caractérisée par la propriété de couper la droite h polaire de H par rapport à L_2 , en dehors du point O , suivant deux points conjugués par rapport à L_2 . Cette droite h passe par O et est nommée la normale projective de L au point O ; elle rencontre L_2 ultérieurement dans un certain point K . — Le voisinage du 8-ème ordre du point O sur L admet deux et seulement deux invariants infinitésimes, respectivement du 4-ème et du 2-ème ordre, qui peuvent être introduits comme les parties principales des birapports (KPP_1P_2) et (KPP_2P_3) , où P indique un point de L proche à O et P_1, P_2, P_3 sont ordonnément les points suivant lesquels la droite KP coupe les lignes L_1, L_2, L_3 dans le voisinage de O . — Tous ces résultats sont utilisés ensuite pour l'étude des courbes gauches dont les tangentes appartiennent à un complexe linéaire de droites, en tenant compte du fait que la surface développable formée par les tangentes à une telle courbe, Γ , coupe le plan osculateur à Γ dans un point O le long de la droite tangente à Γ dans ce point, et ultérieurement suivant une courbe ayant O comme point sextatique. Les éléments géométriques qu'on obtient aisément de la sorte, sont aussi mis en relation avec la quadrique osculatrice à Γ au point O et d'autres éléments connus. *Beniamino Segre (Bologna).*

Hayden, H. A.: Infinitesimal deformations of an L_m in an L_n . Proc. London Math. Soc., II. s. **41**, 332—336 (1936).

Der Verf. hat in einer früheren Arbeit [Proc. London Math. Soc., II. s. **37**, 416—440

(1934); dies. Zbl. 9, 409] Bedingungen für eine parallele Deformation einer V_m in einer V_n (V_n : Riemannsche Mannigfaltigkeit von n Dimensionen) aufgestellt. In der vorliegenden Arbeit vereinfacht er diese Bedingungen und bemerkt, daß sie auch für die L_m in einer L_n gültig sind (L_n : Mannigfaltigkeit mit allgemeiner linearer Übertragung). Insbesondere wird der Fall $m = 1$ behandelt. *Struik* (Cambridge, Mass.).

Hombu, Hitoshi: Konforme Invarianten im Finslerschen Raume. II. J. Fac. Sci. Hokkaido Univ., Ser. I. Math. 4, 51—66 (1935).

This note indicates a construction of a complete set of conformal tensors for a given Finsler space. The author apparently does not overcome the difficulty of obtaining a non-vanishing scalar invariant which will do for all Finsler spaces. The construction of conformal invariants for unitary spaces is also given (see this Zbl. 10, 318). *M. S. Knebelman* (Princeton).

Berwald, Ludwig: Über die Hauptkrümmungen einer Fläche im dreidimensionalen Finslerschen Raum. Mh. Math. Phys. 43, 1—14 (1936).

The definition of Gaussian and mean curvatures of a surface in a three dimensional Finsler space is modified by means of the principal scalar J . $J = 0$ is a necessary and sufficient condition that the surface be Riemannian. A complete analysis of the osculating indicatrix is given and the expressions for the principal curvatures of a hypersurface in an n -dimensional Finsler space are obtained in terms of the coefficients of the first and second fundamental forms. *M. S. Knebelman* (Princeton).

Kawaguchi, Akitsugu: Ein metrischer Raum, der eine Verallgemeinerung des Finslerschen Raumes ist. Mh. Math. Phys. 43, 289—297 (1936).

The author considers a space X_n with coordinates x^i ($i = 1, \dots, n$) and an m -dimensional element ($m < n$) defined by m contravariant vectors p_α^i ($\alpha = 1, \dots, m$). It is required that p_α^i do not vanish simultaneously; the requirement should be that $\|p_\alpha^i\|$ is of rank m . — The transformation $\bar{p}_\alpha^i = U_\alpha^\beta(x) p_\beta^i$, $|U_\alpha^\beta| \neq 0$ does not change the element; therefore one can consider vectors and tensors of three types; the u -tensors whose transformation is linear homogeneous by means of U_α^β ; tensors in X_n obeying the ordinary tensor law and the general tensors, such as $T_{\alpha\beta}^i$, having a mixed law of transformation. The metric and affine structure of the space is then defined by means of 12 conditions which are analogous to those of Cartan for a Finsler space ($m = 1$). Whereas in a Finsler space these conditions lead to total differential equations and can be satisfied in the present case one has partial differential equations whose integrability conditions are not discussed in any detail in the present paper. The different types of curvature tensors are obtained by means of parallel transportation around a closed contour. Equations (27) for the parallelism of p_α^i are of particular interest as they can be used to define Douglass' K -spreads [Math. Ann. 105, 707—734 (1931); this Zbl. 3, 169]. *M. S. Knebelman* (Princeton).

Mechanik.

Sokoloff, George: Sur un théorème de Weierstrass. J. Inst. Math. Acad. Sci. Ukraine Nr 2, 47—51 u. franz. Zusammenfassung 51 (1936) [Ukrainisch].

Verf. gibt einen einfachen Beweis für das folgende allgemeine Theorem bezüglich der Bewegung von n materiellen Punkten im p -dimensionalen euklidischen Raum (U -Kraftfunktion): Existiert ein endlicher Zeitpunkt t , derart, daß das Trägheitsmoment I gegen Null strebt, falls t gegen t_1 strebt und ist $\lim_{t \rightarrow t_1} U \rightarrow \infty$, $\lim_{t \rightarrow t_1} U_1 =$

$$= \lim_{t \rightarrow t_1} \left(2U + \sum_{i,j} r_{ij} \frac{\partial U}{\partial r_{ij}} \right) = +\infty, U_1 - AU \geq 0$$
 (in der Nachbarschaft von $t = t_1$)

(A eine positive Konstante), so sind alle Flächenkonstanten bezüglich des Inertionszentrums gleich Null. *A. Andronoff. A. Witt* (Moskau).

Mazet, Robert: Sur la stabilisation des liaisons d'asservissement. *J. Math. pures appl.*, IX. s. 15, 133—150 (1936).

A system of forces $\Sigma F'$ which can maintain exactly the artificial restraints of Beghin (liaisons d'asservissement) may easily be computed in terms of the given impressed forces ΣF ; but it is possible to add to $\Sigma F'$ an arbitrary system of forces $\Sigma F''$ which vanishes whenever the conditions of constraint are identically satisfied. $\Sigma F''$ may be assumed to depend directly on the coordinates, velocity and time (without intermediation of ΣF) and may be chosen so that the resulting motion is stable both with respect to variations in the initial conditions and in the $\Sigma F'$. By a "stable" motion is meant a motion such that nearby motions approximately satisfy the conditions of restraint for all time. Furthermore by making the $\Sigma F''$ sufficiently powerful, the $\Sigma F'$ may be dropped entirely and the constraints may still be maintained to an arbitrary degree of approximation (asservissement par couple de rappel). The characteristics of this type of motion are discussed and an application is made to the gyroscope.

D. C. Lewis (Ithaca, N. Y.).

Agostinelli, Cataldo: Sui sistemi dinamici di masse variabili. *Atti Accad. Sci. Torino* 71, 254—272 (1936).

The classical results on holonomic dynamical systems of constant masses are generalized to systems of variable masses. The starting point is the elementary law for the variable mass particle that force is equal to rate of change of momentum (rather than the product of mass by acceleration). D'Alembert's principle is formulated, Lagrange's equations obtained, and appropriate generalizations of well known theorems on momentum, angular momentum, the motion of the center of gravity and the rigid body are developed.

D. C. Lewis (Ithaca, N. Y.).

Dramba, Constantin: Sur les singularités du problème restreint des trois corps. *C. R. Acad. Sci., Paris* 202, 1736—1738 (1936).

Das Ziel des Verf. besteht in einer Übertragung einiger der Weierstrass-Sundman'schen Ergebnisse von dem eigentlichen auf das restringierte Dreikörperproblem. Es entgeht ihm dabei, daß in der expliziten, und zwar nicht nur lokalen Regularisierung von Thiele (1895) und seiner Nachfolger alle diese Dinge (und viel mehr) enthalten sind. Wegen Literatur vgl. etwa *Math. Z.* 32, 675 (1930). *Wintner* (Baltimore).

Perron, Oskar: Über eine Schar periodischer Lösungen des ebenen Dreikörperproblems (Mondbahnen). *S.-B. Bayer. Akad. Wiss.* 1936, 157—176 (H. 1).

Der Verf. zeigt, daß ein beim Existenzbeweis kreisähnlicher massenaher periodischer Lösungen üblicher Kunstgriff auch beim eigentlichen ebenen Dreikörperproblem verwendet werden kann und unter Benutzung der Poincaréschen Störungsmethode [vgl. etwa F. L. Griffin, *Trans. Amer. Math. Soc.* 9, 1—33 (1908)] bei beliebigen Werten der Massen sehr einfach zum Ziele führt. Der Ref. möchte bemerken, daß der fragliche aus der Thiele-Levi-Civitaschen Regularisierungstheorie gespeiste elementare Kunstgriff in Wirklichkeit von Birkhoff [*Rend. Circ. mat. Palermo* 39 (1915), § 12] herrührt und daß der fragliche Existenzsatz mit Rücksicht auf die Levi-Civita'sche kanonische Regularisierung des allgemeinen Dreikörperproblems auch im nicht-ebenen (und nichtrestringierten) Fall unter Benutzung der Poincaréschen oder einer der äquivalenten Methoden [vgl. z. B. E. Hölder, *Math. Z.* 31, 200 (1929)] hergeleitet werden kann (die Levi-Civita'sche Regularisierungstheorie gestaltet sich bekanntlich prinzipiell einfacher im ebenen als im allgemeinen Fall). *Wintner* (Baltimore).

Astronomie und Astrophysik.

Spitzer jr., Lyman: Noncoherent dispersion and the formation of Fraunhofer lines. *Monthly Not. Roy. Astron. Soc.* 96, 794—807 (1936).

The author applies Weisskopf and Wigner's theory of natural line breadth to the formation of Fraunhofer lines. He works with atoms whose properties are simplified

by a schematization which still preserves the essential features of the theory. In particular they are supposed to have only three energy levels A, B, C , transitions between A, C being disallowed, but this is sufficient to study the properties of principal and secondary lines. He first evaluates to an adequate degree of approximation the absorption and emission coefficients of an assembly of his atoms in a given field of radiation, expressing the results in terms of the radiation density and the mean life-time of the atoms in states B, C , and certain transition probabilities. The formulae express the exchange of radiation between the centre and wings of a line, which is possible on the present theory, but excluded in more elementary treatments. The equation of radiation transfer is then written down in terms of these quantities, in forms appropriate to the centre and wings of the Fraunhofer line to be studied. The implications are discussed in a preliminary way, together with agencies which may be expected to modify the results.

W. H. McCrea (London).

Pannekoek, A.: Ionization and excitation in the upper layers of an atmosphere. Monthly Not. Roy. Astron. Soc. **96**, 785—793 (1936).

The upper layers of a stellar atmosphere are not in thermodynamic equilibrium, and therefore the Saha ionisation formula cannot be applied to them directly. Milne has given (*Philos. Mag.* **47**, 209) the appropriate correction factor in terms of the gas temperature and the radiation density. In actual cases the latter quantity does not correspond to black-body radiation for any temperature, but is governed, in a manner which can be calculated, by the dependence of the absorption coefficient upon frequency. This paper is concerned with details of the calculation for (a) a pure hydrogen atmosphere, which may be taken to correspond to the case of hot stars, and (b) the solar atmosphere, which is an example of a low temperature atmosphere in which the absorption is due to a mixture of a large number of elements. Numerical results are tabulated, but cannot conveniently be summarised here. A brief discussion of atomic excitation in the upper atmospheric layers is appended.

W. H. McCrea (London.)

Krook, Max: Star models with high central concentration of density. Monthly Not. Roy. Astron. Soc. **96**, 761—771 (1936).

The author's object is to examine the physical possibility of the existence of stars with a high central concentration of density. He studies a perfect gas configuration of the same mass, radius, and luminosity as the sun represented by a polytrope of index $n = 4.5$ (the central density then being 6189 times the mean density). He evaluates the product $\eta\kappa$ for a number of values of r , the distance from the centre, where η is the mean rate of energy generation per unit mass inside r , compared with its value for the whole star, and κ is the opacity coefficient at r . He also evaluates the temperature T for the corresponding points. Then for different hypotheses about η he evaluates κ and compares it with values calculated from a physical formula due to Strömberg. Next he supposes κ given by the latter formula and studies the resulting behaviour of η . Both methods show that the conditions in the outermost part of the model would be highly improbable of realisation in an actual star. In Part II of the paper the author proves the theorem: In any perfect gas configuration in which

$$P = K\rho^{1+1/n}, \quad \kappa \propto \rho/T^s,$$

then exists a value $\alpha^*(n, s)$ of $\alpha (= 1 - \beta)$ such that the rate of energy generation is a monotonic increasing function of r only at points where $\alpha \geq \alpha^*$. The standard notation is used. Details are given for the case $s = 3.5$. *W. H. McCrea* (London).

Peierls, R.: Note on the derivation of the equation of state for a degenerate relativistic gas. Monthly Not. Roy. Astron. Soc. **96**, 780—784 (1936).

This is a contribution to recent discussions on the equation of state of a degenerate relativistic electron gas (cf. Eddington, this Zbl. **11**, 182; **12**, 424; **13**, 86; Møller

and Chandrasekhar, this Zbl. 12, 137). It is here proved that, on the basis of current quantum mechanics, there exists an equation of state which is independent of the shape of the volume in which the gas is confined. This result had been questioned in the discussions. The author gives the necessary careful examination of the boundary conditions, for which the paper itself should be consulted. *W. H. McCrea* (London).

Quantentheorie.

● **Julia, Gaston:** *Introduction mathématique aux théories quantiques. Leçons rédig. par J. Dufresnoy. I. Pte. (Cahiers scient. Publiés par Gaston Julia. Fasc. 16.)* Paris: Gauthier-Villars 1936. VI, 220 pag. Frs. 60.—.

Das Buch ist der erste Band eines Werkes, das eine Ausarbeitung der Pariser Vorlesungen bringen wird, die der Verf. 1935 z. T. für Physiker als eine Einführung in die analytischen Hilfsmittel der Quantentheorie gehalten hat. Der vorliegende Band bringt eine ausführliche und auch für den Anfänger leicht lesbare Darstellung der Theorie der linearen Transformationen endlich-dimensionaler Hermitescher Räume und umfaßt das Gebiet, das als die Spektraltheorie endlicher Matrizen bezeichnet werden kann. Die Begriffsbildungen und Methoden sind, soweit es möglich ist, derart gestaltet, daß sie den Leser auf die transzendenten Fragestellungen vorbereiten.

Wintner (Baltimore).

Rosenfeld, L.: *La première phase de l'évolution de la théorie des quanta.* Osiris 2, 149—196 (1936).

Margenau, Henry: *Relativity and nuclear forces.* Physic. Rev., II. s. 50, 342 bis 344 (1936).

Trotz des im Verhältnis zur Ruhmasse der schweren Teilchen kleinen Rassendefekts des Deuterons kann dessen Berechnung durch Vernachlässigung der Relativitätskorrektur wesentlich verfälscht werden, da er die kleine Differenz zweier Energiebeträge ist, die mit den Ruhenergien fast vergleichbar sind. Verf. sucht den Fehler durch Vergleich einer Rechnung nach der Klein-Gordon-Gleichung mit der üblichen Rechnung abzuschätzen. Bei dem von Feenberg [Physic. Rev. 47, 850 (1935); dies. Zbl. 12, 45] angenommenen Potential zwischen Neutron und Proton beträgt er 28%; er wächst sehr rasch mit abnehmender Reichweite (und entsprechend wachsender Tiefe) des Potentials an.

C. F. v. Weizsäcker (Berlin-Dahlem).

Racah, Giulio: *Sulla nascita di coppie per urti di particelle elettrizzate.* Nuovo Cimento, N. s. 13, 66—73 (1936).

Der Wirkungsquerschnitt für die Paarerzeugung durch geladene Teilchen wird nach der Weizsäckerschen Methode berechnet, welche darin besteht, daß das Feld des einfallenden Teilchens in Lichtquanten aufgelöst und die Paarerzeugung durch diese Lichtquanten berechnet wird. Die Rechnung ist im Rahmen dieser Methode exakt; das Resultat ist ähnlich wie in einer früheren angenäherten Rechnung von Nishina, Tomonaga und Kobayasi. Mögliche Verbesserungen der Weizsäckerschen Methode werden besprochen.

Bethe (Ithaca, N. Y.).

Bethe, H. A.: *An attempt to calculate the number of energy levels of a heavy nucleus.* Physic. Rev., II. s. 50, 332—341 (1936).

Nach Bohr [Nature 137 (1936); dies. Zbl. 13, 237] bedingt die große Anzahl verschiedener Möglichkeiten der Verteilung der Anregungsenergie eines schweren Kerns auf seine Bestandteile eine große Anzahl von stationären Zuständen pro Energieintervall bei den hochangeregten Kernen, die durch Neutroneneinfang entstehen. Verf. berechnet die Anzahl stationärer Zustände eines Fermi-Gases von Protonen und Neutronen, die sich unabhängig voneinander in einem Potentialloch bewegen, als Funktion der Teilchenzahl, der Anregungsenergie und des Drehimpulses und gibt Gründe dafür an, daß die Ergebnisse dieser sehr rohen Abschätzung doch größten-

ordnungsmäßig richtig sein können. Der mittlere Abstand zweier Niveaus vom Drehimpuls I eines Kerns der Teilchenzahl A und der Anregungsenergie $Q \cdot 10^6 \text{ eV}$ ergibt sich zu $4,1 \cdot 10^6 x^2 e^{-x} / (2I + 1) \text{ eV}$, mit $x = \sqrt{AQ/2,20}$. Demnach nimmt die Anzahl der Niveaus mit AQ außerordentlich rasch zu. Dies erklärt die größere Häufigkeit sehr großer Wirkungsquerschnitte für Neutroneneinfang 1. bei schweren Kernen, 2. wenn durch den Prozeß ein sehr stabiler Kern gebildet wird (Q groß). Für $A=100$ ergibt sich ein mittlerer Niveauabstand der Größenordnung 50–500 V.

C. F. v. Weizsäcker (Berlin-Dahlem).

Bechert, Karl: Über ein einfaches Kernmodell. *Z. Physik* **101**, 721–731 (1936).

Der Kern wird schematisiert als Fermisches Gas von Protonen und Neutronen. Auf die Neutronen wirkt ein Kastenpotential, auf die Protonen außerdem die Coulombsche Abstoßung. Das Kernvolumen wird proportional dem Atomgewicht gesetzt. Ausgehend von diesem Modell findet Verf. eine Beziehung zwischen Atomgewicht und Kernladung, die in befriedigender Übereinstimmung mit den experimentellen Tatsachen ist, falls für die Kernradien Werte angenommen werden, die etwa 2,5mal kleiner sind als die üblichen.

Casimir (Leiden).

Hellmann, H.: Ein kombiniertes Näherungsverfahren zur Energieberechnung im Vielelektronenproblem. II. *Acta physicochim. (Moskva)* **4**, 225–244 (1936).

Es wird gezeigt, wie in der statistischen Methode von Thomas und Fermi die Elektronen eines Atoms sich nach den Drehimpulsquantenzahlen l sondern lassen. Die für ein gegebenes l gültige Schrödingergleichung führt mit den Voraussetzungen der statistischen Methode durch geeigneten Grenzübergang auf eine gegenüber der gewöhnlichen Thomas-Fermischen etwas abgeänderte, l enthaltende Differentialgleichung für das Potential. Die ihm entsprechende Elektronendichte ist für $l > 0$ nur zwischen einem minimalen und einem maximalen Abstand vom Kern von Null verschieden. Das in einer früheren Arbeit mit gleichem Titel (dies. Zbl. **11**, 379) besprochene Näherungsverfahren läßt sich damit auch auf Fälle ausdehnen, wo der tiefste Zustand der Valenzelektronen nicht ein s -Zustand ist. Eine für s -Zustände gebliebene Lücke wird mit Hilfe einer Überlegung von v. Weizsäcker (dies. Zbl. **12**, 235) geschlossen.

F. Hund (Leipzig).

Steenholt, G.: Numerische Berechnung der Potentialkurven des Wasserstoffmolekülions. *Avh. Norske Vid. Akad. Oslo* **1936**, 1–16 (Nr. 4).

Mit dem von Hylleraas [*Z. Physik* **71**, 739 (1930)] benutzten Entwicklungsverfahren werden die Terme $2s\sigma$, $2p\sigma$, $2p\pi$, $3s\sigma$, $3p\sigma$, $3p\pi$, $3d\sigma$, $3d\pi$, $3d\delta$, $4f\pi$ des Wasserstoffmolekülions als Funktion des Kernabstandes berechnet. Ein Minimum haben $2p\sigma$, $3d\sigma$ und $4f\pi$.

F. Hund (Leipzig).

Peierls, R.: On Ising's model of ferromagnetism. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **32**, 477–481 (1936).

Isings Modell enthält in einfacher Weise eine magnetische Wechselwirkung benachbarter Elementarmagnete; es ergab im eindimensionalen Fall keinen Ferromagnetismus. Hier wird gezeigt, daß das mehrdimensionale Isingsche Modell ferromagnetische Eigenschaften hat.

F. Hund (Leipzig).

Kalashnikov, S.: Zur Bestimmung des inneren Potentials der Kristalle aus Elektronenbeugung. *Physik. Z. Sowjetunion* **9**, 81–88 (1936).

Die Abhängigkeit des inneren Potentials von der Geschwindigkeit der Elektronen wird theoretisch behandelt. Speziell wird der Fall behandelt, daß das Potential in weiten Gebieten des Kristalls ziemlich konstant ist und nur in kleinen Gebieten stark anziehend: dann kann der Einfluß der letzteren Gebiete durch einen Phasensprung der Elektronenwelle an den Netzebenen dargestellt werden. *Bethe (Ithaca, N. Y.).*